

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

ДИДАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до комп'ютерного практикуму з дисципліни «Теоретична механіка»
для викладачів кафедри теоретичної механіки та студентів бакалаврських напрямів 6.050702 – «Електромеханіка», 6.051003 – «Приладобудування» електромашинобудівного факультету

Затверджено редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 2 від 12.12.2013

Харків
НТУ «ХПІ»
2014

Дидактичні рекомендації до комп'ютерного практикуму з дисципліни «Теоретична механіка» для викладачів кафедри теоретичної механіки та студентів бакалаврських напрямів 6.050702 – «Електромеханіка», 6.051003 – «Приладобудування» електромашинобудівного факультету / Уклад. В.М. Адашевський, О. К. Морачковський. – Х. : НТУ «ХПІ», 2014. – 76 с.

Укладачі: В.М. Адашевський, проф.,
О.К. Морачковський, проф.

Рецензент Г.І. Львов, проф., завідувач кафедри динаміки та міцності машин

Кафедра теоретичної механіки

1. ДИДАКТИЧНІ ТА МЕТОДИЧНІ ВИМОГИ ДО НАВЧАННЯ

Дидактика (грец. didaktikós – учити і «didasko» – вивчати) – педагогічна теорія освіти і навчання, яка відкриває закономірності засвоєння знань, розуміння, навичок і формування переконань, визначає обсяг, структуру та зміст освіти.

Освіта у ВНЗ – це сукупність знань, умінь, навичок і компетенцій, набутих у навчальних закладах або самостійно, а також процес засвоєння систематизованих знань, розвитку пізнавальних сил, формування світогляду. Традиційно виділяють три види освіти: загальну (школи, гімназії, ліцеї, колегіуми) і спеціальну (професійна або політехнічна (грец. poly – багато і techne – мистецтво, майстерність, вправність)) – яку здобувають у вищих навчальних закладах.

Зміст освіти – це чітко окреслене коло знань, умінь, навичок і компетенцій, якими людина оволодіває шляхом навчання у навчальному закладі або самостійно. Містить систему наукових знань про природу, суспільство, людське мислення, культуру та практичних умінь і навичок, необхідних для життєдіяльності людини. Зміст освіти в цілому має сприяти формуванню гармонійної, всебічно розвиненої особистості. Зміст освіти закріплюється державними документами та навчально-методичними комплексами. Це програми та робочі програми навчальних дисциплін, підручники, посібники.

Принципи навчання: науковість, систематичність й послідовність, творча активність й самостійність, єдність теоретичної і практичної підготовки, професійної спрямованості.

Програма навчальної дисципліни – основний нормативний документ (стандарт) вищого навчального закладу, що складається на підставі освітньо-професійної програми і структурно-логічної схеми підготовки фахівців та визначає організацію їх навчальної діяльності.

Робоча програма навчальної дисципліни охоплює: графік процесу навчання; перелік та обсяг навчальних дисциплін; послідовність їх вивчення; конкретні форми проведення занять (лекції, семінари, лабораторні роботи тощо) та їх обсяг; форми проведення підсумкового контролю (екзамен, залік, диференційований залік); обсяг часу, відведеного на самостійну роботу студентів; кількість курсових та розрахункових робіт, які виконує студент за період навчання. Програму навчальної дисциплі-

ВСТУП

Дидактичні рекомендації з дисципліни «Теоретична механіка» призначено для викладачів, які виконують навчально-методичну роботу з організації та проведення комп'ютерного практикуму з теоретичної механіки. Надані теоретичні положення і приклади моделювання із застосуванням комп'ютерних технологій, основні інваріантні і коваріантні величини дидактичних одиниць теоретичної механіки: кінематики, статички і динаміки.

Вказівки містять: завдання комп'ютерного практикуму, які можна виконати самостійно у ВНЗ або дома, комп'ютерні лабораторні роботи, згідно з робочою програмою та змістовими модулями: Модуль 1 – «Кінематика та Статика» та Модуль 2 – «Динаміка» нормативної навчальної дисципліни «Теоретична механіка» для студентів бакалаврських напрямів 6.050702 – «Електромеханіка», 6.051003 – «Приладобудування» електромашинобудівного факультету Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Сучасна освіта застосовує комп'ютерні практичні та лабораторні заняття на базі комп'ютерних та Інтернет-технологій, Комп'ютерний практикум з теоретичної механіки застосовується в навчальному процесі на кафедрі теоретичної механіки НТУ «ХПІ» для комп'ютерного аналізу статички, кінематики та динаміки машин. Сучасні інформаційні технології втілені у програмний комплекс (ПК) «КіДиМ», який створено доктором технічних наук, професором Андрєєвим Ю.М.

Дидактичні рекомендації можуть бути корисними викладачам, аспірантам і студентам природничих факультетів університетів та особам, що займаються комп'ютерним моделюванням і розв'язком обчислювальних завдань.

Автори вдячні професору, д-ру техн. наук Львову Г.І. – рецензенту вказівок.

Серпень 2013 року.

ни складають провідні викладачі, як правило, завідувачі кафедр, керівники методичних комісій, за рівнями підготовки фахівця: бакалавр; спеціаліст; магістр. Затверджується керівником (проректором) вищого навчального закладу, погоджується з методичними комісіями факультету, закладу і скріплюється відповідними печатками. З огляду на державні стандарти в освіті всі дисципліни розподілені на дві групи: нормативні й вибіркові.

Нормативні навчальні дисципліни – це дисципліни, встановлені відповідною освітньо-професійною програмою, тому дотримання їх назв і обсягів є обов'язковим для навчального закладу. Нормативна частина навчального плану включає групу фундаментальних дисциплін, що містить цикл дисциплін природничонаукової підготовки та перелік дисциплін, вивчення яких становить базу для засвоєння вужчих фахових навчальних курсів, об'єднаних у третьому циклі професійно орієнтованих дисциплін.

Програма навчальної дисципліни – державний документ, в якому визначено зміст освіти з окремої навчальної дисципліни з виділенням розділів, тем, кількості годин на їх опрацювання. Вони є базовими з основних дисциплін з урахуванням державних стандартів. На їх основі кафедри вищих навчальних закладів розробляють робочі програми, які затверджуються кафедрами, радами факультетів та вченими радами вищих навчальних закладів. Робочі програми обов'язкові для виконання викладачами. Програми навчальної дисципліни є базовим документом при підготовці підручників і навчальних посібників для вищої школи.

Підручник – це навчальна книга, в якій розкривається зміст навчального матеріалу з конкретної дисципліни відповідно до вимог чинної програми.

Навчальний посібник – це навчальна книга, в якій розкривається зміст навчального матеріалу з окремих аспектів програми, а також подається додатковий матеріал для формування у студентів умінь і навичок. У вищих навчальних закладах більш поширені навчальні посібники. Це дає змогу викладачам і студентам значно розширювати діапазон пізнавальної діяльності, залучати додаткові наукові джерела, особливо ті, в яких подається нова наукова інформація.

Підготовка підручників і навчальних посібників потребує від авторів великої відповідальності. По-перше, у цих навчальних книгах мають бути акумульовані ґрунтовні наукові знання з конкретних про-

блем, що мають сенс для розуміння ґносеологічних засад розвитку певної науки і які не втратили своєї значущості для подальшого становлення відповідних наукових напрямів, а також сприяють формуванню професійних умінь і навичок майбутніх фахівців. По-друге, у навчальних посібниках мають бути закладені основи й передумови подальшого розвитку наукових інтересів студентів.

Важливо в підручниках і навчальних посібниках структурувати матеріал з належним дотриманням принципів навчання та дидактичних вимог: чітко визначати проблемні питання, які розглядаються, завдання для самостійної навчальної роботи студентів, список літератури, питання для самоконтролю і т. ін.

В основі різних видів навчальної діяльності за участю студентів лежать принципи навчання, де студенти мають не лише оволодіти відповідною сумою знань, а й навчитися самостійно здобувати знання, оволодіти вміннями застосовувати теоретичні знання на практиці.

Лекційні заняття. Процес навчання – багатогранна і багатофакторна діяльність викладача і студентів, він спрямований на реалізацію низки функцій. Лекція займає особливо важливе місце у навчально-виховній роботі, містить можливості здійснення освітньої, розвивальної, виховної, організуючої функцій.

Вимоги до лекції: сучасний науковий рівень і насичена інформативність, переконлива аргументація, доступна і зрозуміла мова, емоційність, чітка структура і логіка, наявність яскравих прикладів, наукових доказів, обґрунтувань, фактів. Лекції у вищому навчальному закладі підпорядковані відповідно до навчального завдання програми і спрямовані на реалізацію робочої програми навчальної дисципліни. Це ставить певні вимоги до змісту, структури, технології і методики підготовки та читання лекції.

Структура лекції: план – основні питання лекції; вступна частина – зв'язок з минулою лекцією, введення в тему; виклад основних положень з акцентованими висновками за кожним окремо; підбиття підсумків – загальний висновок.

Лекція будується на принципах системності, інформативності, наочності, зрозумілості (доступності). Кожна лекція є логічно завершеною ланкою єдиної замкненої системи – курсу лекцій. У її тексті мають бути чітко пов'язані між собою структурно-логічні дидактичні блоки. Проектується графічний текст, планується, де, коли, скільки і які схеми,

рисунки, графіки, формули подаються як підтвердження вербальної інформації. Принцип наочності реалізується засобами візуалізації (ТЗН, розданий матеріал, схеми, планшети тощо). Лекція має читатися зрозумілою для студентів мовою, незнайомі слова і терміни роз'яснюються, не варто перенасичувати лекцію "наукоподібними" термінами і модними іноземними словами. Текст (лат. **texturn** – зіткане) лекції має бути логічним, простим і зрозумілим.

Вступна лекція є початковим етапом опрацювання нової дисципліни навчального плану. Завдання такої лекції полягає в тому, щоб розкрити структуру курсу, особливості його вивчення, місце нової навчальної дисципліни у системі професійної підготовки студентів, її актуальність і важливість у їх майбутній професійній діяльності. Та головне у підході до лекції цього виду – зацікавити студентів змістом навчальної дисципліни, сформувати у них інтерес до неї. Читання вступної лекції вимагає від викладача значного емоційного піднесення, натхнення, образності. Важливо захопити студентів не лише змістом навчального матеріалу, а й викликати інтерес до себе як до викладача, особистості.

Тематичні лекції займають основне місце у науково-педагогічній діяльності викладача вищого навчального. Робота викладача і студентів вимагає цілеспрямованості, систематичності та послідовності, логічної узгодженості між окремими темами.

Підсумкова (заклучна) лекція завершує опрацювання навчального курсу. Головне завдання такої лекції полягає в тому, щоб дати можливість студентам усвідомити наукову, методологічну основу розвитку системи наук, взаємозв'язок між ними, окреслити перспективи подальшого становлення науки того чи іншого напрямку. Проведення таких лекцій доручають найбільш досвідченим, ерудованим викладачам.

Освітня функція лекції – можливість для оволодіння змістом навчального матеріалу на рівні історичного досвіду і ознайомлення з новими досягненнями науки, усвідомлення перспективи подальшого розвитку наукових пошуків у відповідних галузях, а також розкриття можливостей використання конкретних знань у професійній діяльності. Одночасно лекція допомагає студентам зорієнтуватися у великому обсязі інформації: ознайомитися з літературою, тенденціями наукових пошуків учених, науковими школами, привести наукову інформацію в упорядковану систему.

Розвивальна функція лекції – необхідність забезпечення оптимальних умов для інтелектуального розвитку особистості шляхом включення її в активну розумову діяльність. Розвиток і навчання – взаємопов'язані процеси. Розумовий розвиток – передумова успішності навчання, але й навчання у свою чергу сприяє розвитку. У процесі отримання інформації значна її кількість "випадає" з пам'яті. І це – закономірний процес. Важливо, що людина матиме в результаті. Суттєво, аби це був певний рух в інтелектуальному розвитку. Тому на лекції треба вдаватися до таких прийомів, які б спонукали кожного студента до активного мислення у всіх його проявах.

Виховна функція лекції – формування у майбутніх фахівців певних морально-духовних якостей безпосередньо через зміст навчального матеріалу і організацію їх на конкретну пізнавальну діяльність. Зміст навчального матеріалу має сприяти формуванню у студентів наукового світогляду, соціальної зрілості, громадянської відповідальності, естетичних почуттів і естетичної культури, працелюбності.

Організуюча функція лекції – мобілізація студентів на навчальну діяльність. На кожній лекції викладач має дбати про створення оптимальних умов для реалізації зазначених функцій.

Дидактичні вимоги до лекції у ВНЗ. *По-перше*, зміст лекції має відповідати робочій навчальній програмі, відображати найновіші досягнення науки, висвітлювати перспективи подальшого розвитку наукових пошуків. *По-друге*, у лекції мають реалізовуватись вимоги дидактичних принципів навчання: науковості, систематичності і послідовності, свідомості, активності й самостійності, наочності, зв'язку змісту навчального матеріалу з професійною діяльністю, доступності, емоційності. *По-третє*, має бути забезпечена логічно доцільна структура лекції відповідно до змісту навчального матеріалу. *По-четверте*, лекція має сприяти активізації мислення студентів з метою їх інтелектуального розвитку. *По-п'яте*, у лекції доцільно виокремлювати певні компоненти змісту для самостійного опрацювання студентами з належним методичним забезпеченням.

Методичні вимоги до лекції: її треба викласти так, щоб студенти зрозуміли, зацікавилися її змістом, осмислено законспектували і при цьому не перевтомилися. Необхідно застосовувати оптимальний темп викладу для конспектування, не допускаючи неперервного монотонного читання і не відриваючись далеко від теми, захопившись окремими по-

дробницями і деталями, треба бути впевненим, що студенти розуміють і осмислюють почуте, не перенапружуючи свої зусилля до стресового стану. Значущі моменти, дидактичні одиниці доцільно виділяти інтонацією, зміною темпу, повторенням.

Яким би не був досвідченим викладач, він повинен завчасно підготувати повний текст лекції, постійно удосконалювати, поліпшувати її, доповнювати, додавати новий матеріал, проектувати хід, подумки тренуватися. Підготовка і читання лекцій, якщо підходити до цього серйозно і відповідально, – складна, тяжка і затратна в часі робота.

Треба кожного разу ретельно готуватися до лекції, продумувати її сценарій стосовно конкретної аудиторії, бути вимогливим до себе, самокритичним. Необхідно враховувати особливості студентської аудиторії. Одну й ту ж лекцію треба подавати по-різному залежно від профілю, факультету, курсу, форми навчання. Особливо уважно треба підходити до читання лекцій студентам заочної форми навчання.

Педагогічна парадигма співробітництва вимагає ставлення до студентів як до партнерів, рівних співрозмовників. Треба уміти вести себе розкуто, невимушено, але й не чванливо, не розв'язно. Лектор має бути доброзичливим. Необхідно пам'ятати, що студенти не тільки слухають зміст лекції, а й уважно спостерігають і оцінюють самого лектора. Треба бути належно і охайно одягненим, дотримуватися природних, невимушених поз, поводити себе щиро, доброзичливо, впевнено. Корисним для молодого викладача є відвідування його занять досвідченим колегою високої кваліфікації, з наступним об'єктивним аналізом досягнень і недоліків.

Лабораторні (практичні) заняття (лат. **prakticos** – діяльний) – форма навчального заняття, в ході якого викладач організовує розгляд студентами окремих теоретичних положень навчальної дисципліни та формує вміння і навички їх практичного застосування шляхом індивідуального виконання студентами відповідно сформульованих завдань. Ця форма занять проводиться в лабораторіях або аудиторіях, обладнаних необхідними технічними засобами навчання, обчислювальною технікою.

Технології і техніки організації та проведення лабораторних (практичних) занять мають особливості у навчальній роботі. Головне їх завдання – закріплення, переведення у довготривалу пам'ять теоретичних знань, формування умінь і навичок з навчальної дисципліни, оволо-

діння апаратом наукових досліджень. Кожен з цих видів виконує свої завдання. Але головне, що їх об'єднує, – забезпечення умов для самостійної роботи студента, оволодіння раціональними й ефективними методами пізнання.

Лабораторні та практичні заняття забезпечують оптимальні умови для інтелектуального розвитку особистості, для оволодіння раціональними методами та прийомами практичної діяльності, окремі лабораторні роботи мають на меті формування вміння й навичок у майбутніх фахівців. Фактично інформація, яку студенти сприймають на лекціях, фіксується лише в короткотривалій пам'яті в обсязі 20–25 %. І якщо не вживати належних дій для підкріплення первинних знань, вони втрачаються, не залишивши жодного сліду в пам'яті.

Для успішного виконання лабораторних робіт треба добре знати теоретичний матеріал, володіти методикою застосування знань на практиці, вміти користуватися необхідним обладнанням, устаткуванням, матеріалами, технікою для проведення вимірювань, обчислень. Безперечно, що успіх можливий лише при копійчій підготовчій роботі студента.

Якщо студент поставлений перед необхідністю самостійно розв'язувати завдання, то це значно активізує потенції його психічної діяльності, сприяє розвитку та становленню позитивних якостей. Матеріали для самостійної роботи, його обсяги добираються викладачем, він же визначає графіки, строки виконання, форми контролю; розробляє систему завдань, методичні рекомендації та інструкції, списки обов'язкової і додаткової літератури.

Лабораторне (практичне) заняття має бути ретельно підготовлене. Викладач, якому доручено ці заняття, за погодженням з лектором навчальної дисципліни завчасно готує необхідний методичний матеріал – тести для виявлення рівня оволодіння студентами відповідними теоретичними положеннями, набір завдань різного ступеня складності для розв'язання їх студентами.

Структура практичного заняття: проведення попереднього контролю знань, умінь і навичок студентів; постановка викладачем загальної проблеми та її обговорення за участю студентів; розв'язування завдань з їх обговоренням; розв'язування контрольних завдань; їх перевірка й оцінювання. Отримані студентом за окремі практичні заняття оцінки враховуються при виставленні підсумкової оцінки з відповідної навчальної дисципліни.

Кількість годин на лабораторній (практичній) заняття з окремої дисципліни визначена навчальним планом. Перелік тем лабораторних (практичних) занять міститься в робочій навчальній програмі дисципліни. Кількість студентів на практичному занятті не повинна перевищувати половини академічної групи.

У процесі проведення лабораторних (практичних) занять використовуються різні методи навчання. Оскільки головним завданням цього виду навчальної роботи є формування умінь і навичок, провідне місце має відводитися різноманітним вправам (підготовчим, пробним, за зразком, тренувальним, творчим, практичним, графічним, усним, письмовим, професійним, технічним та ін.).

Лабораторні (практичні) заняття мають відповідати таким *вимогам*:

1. Забезпечення розуміння студентами необхідності володіння базовими теоретичними знаннями та усвідомлення необхідності вироблення вмінь і навичок.

2. Навчання студентів раціональним методам оволодіння вміннями й навичками із дотриманням систематичності, логічної послідовності. Забезпечення оптимальних умов для формування умінь і навичок (санітарно-гігієнічних, дидактичних, виховних).

3. Забезпечення самостійної діяльності кожного студента, розробка завдань для лабораторних (практичних) занять з включенням у систему лабораторних (практичних) занять завдань творчого характеру.

4. Систематичний контроль виконання студентами лабораторних (практичних) завдань та постійне заохочення практичної навчальної діяльності студентів.

Доцільний і ефективний шлях проведення лабораторних (практичних) занять, коли викладач має чітко визначені завдання, знайомить студентів з методами самостійної діяльності, допомагає їм усвідомити алгоритм дій, організує самостійну роботу кожного студента.

Комп'ютерний практикум (заняття), лабораторна робота (лат. **labor** – праця) – форма навчального заняття, за якою студенти під керівництвом викладача особисто проводять натурні або імітаційні експерименти чи комп'ютерні дослідження з метою практичної перевірки і підтвердження окремих теоретичних положень навчальної дисципліни, набувають практичних навичок роботи з лабораторним обладнанням чи обчислювальною технікою (комп'ютер з програмним забезпеченням),

устаткуванням, вимірювальною апаратурою, оволодівають методикою експериментальних досліджень у конкретній предметній галузі.

Проведення лабораторних занять потребує добре підготовлених, спеціально обладнаних навчальних лабораторій з використанням устаткування, пристосованого до умов навчального процесу (комп'ютери, лабораторні установки тощо).

Структура лабораторного заняття: проведення поточного контролю підготовленості студентів до виконання конкретної лабораторної роботи, виконання її завдань, підготовка індивідуального звіту про виконану роботу і захист його перед викладачем. Виконання лабораторної роботи оцінюється викладачем. Підсумкові оцінки за виконання лабораторних робіт ураховуються при визначенні семестрової підсумкової оцінки з відповідної навчальної дисципліни.

Плани, технології та методику проведення занять та лабораторних робіт розробляють відповідні кафедри. Кількість годин на комп'ютерний практикум (практичні та лабораторні заняття) з окремої дисципліни визначається навчальним планом. Перелік тем лабораторних занять визначено робочою навчальною програмою дисципліни. Заміна лабораторних занять іншими видами навчальних занять не допускається. Кількість студентів на лабораторних роботах зазвичай не перевищує половини академічної групи. Кожен студент має самостійно виконати всі лабораторні роботи й оформити їх результати.

У процесі організації та проведення лабораторних робіт викладачеві необхідно акцентувати увагу на таких моментах: змістовність лабораторних занять; забезпечення лабораторій, кабінетів новітнім обладнанням; забезпечення самостійності студентів у ході виконання лабораторних робіт; дотримання правил техніки безпеки; навчання студентів методам виконання цього виду робіт.

Дидактичною ціллю лабораторного заняття є практичне підтвердження окремих теоретичних положень даної навчальної дисципліни, придбання практичних умінь й навичок роботи з лабораторним устаткуванням чи обчислювальною технікою (комп'ютер з програмним забезпеченням), вимірювальною апаратурою, методикою експериментальних чи обчислювальних досліджень у конкретній предметній області. Перелік тем лабораторних занять визначається робочою програмою навчальної дисципліни.

Лабораторне заняття чи лабораторна робота провадиться зі студентами, кількість яких відповідає складу академічної групи. В окремих випадках (обмежена кількість робочих місць і т. ін.) допускається проведення лабораторних занять з меншою кількістю студентів.

Етапами проведення лабораторних занять є: проведення попереднього контролю підготовленості студентів до конкретної лабораторної роботи – опитування; виконання певних завдань відповідно до запропонованої тематики; оформлення індивідуального звіту до лабораторної роботи ПК «КіДиМ»; оцінювання результатів роботи студентів викладачем.

При виконанні лабораторних робіт обов'язковим етапом підготовки й проведення є інструктаж з правил безпеки і контроль за їх дотриманням.

В окремих випадках деякі лабораторні заняття студенти можуть виконати в забезпечених комп'ютерами лабораторіях чи дистанційно.

Консультація (лат. *consultatio* – звертання за порадою) – форма навчального заняття, що передбачає надання студентам потрібної допомоги у засвоєнні теоретичних знань і виробленні практичних умінь і навичок шляхом відповіді викладача на конкретні запитання або пояснення окремих теоретичних положень чи аспектів їх практичного застосування. За спрямованістю вона має скеровуватися на допомогу студентам в оволодінні методологією теми чи розділу, а також методами самостійної навчальної роботи. Кількість годин на консультації визначається навчальними планами й індивідуальними планами викладачів. Консультації проводять викладачі, які читають відповідний навчальний курс, за графіком, що встановлює кафедра за погодженням з деканатами. Викладачі можуть надавати консультації групам студентів або окремим студентам.

2. ДИДАКТИЧНІ ПРОПОЗИЦІЇ ДО СТВОРЕННЯ КОМП'ЮТЕРНОГО ПРАКТИКУМУ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ ДЛЯ ЕМБ ФАКУЛЬТЕТУ

№ з/п	Вид занять	Кількість годин	Найменування комп'ютерних лабораторних занять та лабораторних робіт
Модуль 1 – Кінематика та статика / 2 кредити			
1	ЛЗ	2	ЛЗ: Знайомство з ПК «КІДІМ». Дослідження кінематичних характеристик руху точки
2	ЛЗ	2	ЛЗ: Дослідження найпростіших рухів тіл та їх перетворення
3	ЛЗ	2	ЛЗ: Дослідження плоскопаралельного руху тіл
4	ЛР	2	ЛР1 – Дослідження кінематики точки та механічної системи
5	ЛЗ	2	ЛЗ: Розв'язання задач статички тіл, на які діє збіжна система сил
6	ЛЗ	2	ЛЗ: Розв'язання задач статички тіл під дією плоскої системи сил
7	ЛЗ	2	ЛЗ: Розв'язання задач рівноваги тіл під дією просторової системи сил
8	ЛР	2	ЛР2 – Визначення реакцій в'язей механічної системи
Усього за М1 ЛЗ-6, ЛР-2, А-16			
Модуль 2 – Динаміка / 2 кредити			
1	ЛЗ	2	ЛЗ: Розв'язання першої задачі динаміки точки
2	ЛЗ	2	ЛЗ: Розв'язання другої задачі динаміки точки
3	ЛЗ	2	ЛЗ: Визначення динамічних характеристик руху тіл із застосуванням теорем динаміки матеріальної системи
4	ЛР	2	ЛР3 – Моделювання динаміки тіл із застосуванням теорем динаміки матеріальних систем
5	ЛЗ	2	ЛЗ: Визначення динамічних характеристик руху тіл із застосуванням теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної системи
6	ЛЗ	2	ЛЗ: Визначення динамічних характеристик руху системи тіл із застосуванням теореми про зміну кінетичної енергії
7	ЛЗ	2	ЛЗ: Визначення динамічних характеристик руху системи тіл із застосуванням рівнянь Лагранжа 2-го роду
8	ЛР	2	ЛР4 – Аналітичне і комп'ютерне моделювання динаміки електромеханічного приводу на базі рівнянь Лагранжа 2-го роду
Усього за М2 ЛЗ-6, ЛР-2, А-16			
Усього за семестр: ЛЗ-12, ЛР-4, А-32			

3. МОДУЛЬ 1 – КІНЕМАТИКА ТА СТАТИКА

Для підготовки до лабораторних занять рекомендується ознайомитись з наступними стислими теоретичними положеннями та відповісти на питання для самоконтролю.

3.1. Теоретичні відомості з кінематики точки

Координатний спосіб завдання руху точки. За декартовим законом руху точки її положення у просторі задається функціями часу координат точки:

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t).$$

Проекції вектора швидкості на осі декартової системи координат обчислюються за формулами:

$$v_x = \dot{x}; v_y = \dot{y}; v_z = \dot{z}.$$

Модуль вектора швидкості точки та його напрямні косинуси обчислюються за формулами:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}; \quad \cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|}; \quad \cos \beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|}; \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{|\vec{v}|},$$

де α, β, γ – кути, що створює вектор швидкості з відповідними осями координат.

Проекції вектора пришвидшення точки на осі декартової системи координат обчислюються за формулами:

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}.$$

Модуль вектора пришвидшення точки та його напрямні косинуси обчислюються за формулами:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; \quad \cos \alpha_1 = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad \cos \beta_1 = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos \gamma_1 = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

де $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – кути, що створює вектор пришвидшення з відповідними осями координат.

Натуральний спосіб завдання руху точки. За натуральним способом траєкторія руху точки вважається заданою, наприклад у декартовій системі координат – $z = z(x, y)$. Натуральний закон руху точки вважа-

ється заданим, якщо задана неперервна двічі диференційована функція часу $s = s(t)$ – дугова координата положення точки на заданій траєкторії.

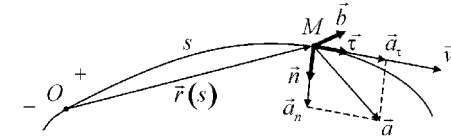


Рисунок 3.1 – Кінематичні характеристики матеріальної точки

На заданій траєкторії визначається точка початку відліку дугової координати та напрям руху по траєкторії, а з рухомою точкою зв'язують натуральну систему координат (натуральний тригранник – триєдр Френе) – $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$ сукупність дотичного, нормального і біноrmального до траєкторії ортогональних одиничних векторів.

Вектор швидкості точки обчислюється за формулою

$$\vec{v} = \dot{s} \vec{\tau} = v \vec{\tau}$$

Вектор пришвидшення точки та його модуль обчислюються за формулами:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n; \quad \vec{a}_\tau = \dot{s} \vec{\tau} = \dot{v} \vec{\tau}; \quad \vec{a}_n = \frac{(\dot{s})^2}{\rho} \vec{n} = \frac{v^2}{\rho} \vec{n};$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_\tau|^2 + |\vec{a}_n|^2}; \quad \vec{a}_b = 0,$$

де $k = 1/\rho$ – кривина і ρ – радіус кривини траєкторії.

Формули переходу від декартового до натурального (природного) законів руху. Якщо закон руху задано в декартових координатах: $x = x(t); y = y(t); z = z(t)$, то для визначення векторів швидкості та пришвидшення у натуральній (природній) системі координат можна застосовувати формули переходу:

$$\vec{v}_\tau = \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}; \quad a_\tau = (a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z) / v;$$

$$a_n = |a_x v_y - a_y v_x| / v,$$

де $a_x = \ddot{x}(t); a_y = \ddot{y}(t); a_z = \ddot{z}(t); v_x = \dot{x}; v_y = \dot{y}; v_z = \dot{z}; v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2};$

Кривина траєкторії визначається за формулою: $k = a_n / v^2$. Шлях, що проходить точка уздовж траєкторії (довжина дуги траєкторії) за проміжок часу $[t_1, t_2]$, визначається за формулою $\sigma = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$.

Для визначення $s = s(t)$ – закону руху точки по траєкторії необхідно інтегрувати диференціальне рівняння $\ddot{s} = a_\tau(t)$, $t \in [t_0, T]$ при заданих початкових умовах $s(t_0) = 0$; $\dot{s}(t_0) = v(t_0)$.

Питання для самоконтролю

1. Що вивчається в кінематиці?
2. Що містить система відліку?
3. Що таке закон і траєкторія руху точки?
4. Як задати закони руху в декартових та полярних координатах?
5. Як задати закони руху в натуральних координатах?
6. Як визначити рівняння траєкторії в декартових, полярних і натуральних координатах?
7. За якими формулами визначається швидкість та пришвидшення точки, якщо рух точки задано в декартових координатах?
8. За якими формулами визначається швидкість та пришвидшення точки, якщо рух точки задано в полярних координатах?
9. За якими формулами визначається швидкість та пришвидшення точки, якщо рух точки задано в натуральних координатах?
10. Як визначаються проекції на дотичну та нормаль к траєкторії пришвидшення точки, рух якої задано натуральним способом?
11. Що таке кривина траєкторії руху точки і як її визначити, якщо закон руху у площині задано в декартових координатах?
12. Що означає інваріантність векторів швидкості і пришвидшення?

3.2. Лабораторні заняття

Дослідження кінематичних характеристик руху точки

Завдання 1: Визначте траєкторію, швидкість і пришвидшення

точки M , що рухається за декартовим законом, см:

$$x = 4 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) + 6, \quad y = 4 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + 4.$$

Для моменту часу $t = 0,5$ с обчисліть значення координат точки, її швидкість і пришвидшення, за формулами переходу від декартових координат до натуральних (природних), обчисліть дотичні й нормальні складові пришвидшення, а також радіус кривини траєкторії.

Завдання 2: Для точки M , що рухається вздовж кола радіусом R за законом $S = \pi t$, м, визначити швидкість і пришвидшення у момент часу $t = 10$ с. Обчисліть у цей час координати положення точки M , прийняв рівняння кола в декартовій системі координат: $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 4$.

3.3. Теоретичні відомості з кінематики найпростіших рухів тіл

Поступальним рухом твердого тіла називається такий рух твердого тіла, при якому будь-яка пряма, проведена в тілі, залишається паралельною самій собі. При поступальному русі твердого тіла всі його точки описують однакові траєкторії, мають у будь-який час геометрично рівні швидкості й пришвидшення. Тому поступальний рух твердого тіла можна визначити, вивчивши рух тільки однієї його точки (здебільшого це центр мас).

Обертанням твердого тіла навколо нерухомої осі (*вісь обертання*) називається такий рух твердого тіла, при якому будь-які дві точки цього тіла залишаються під час руху нерухомими.

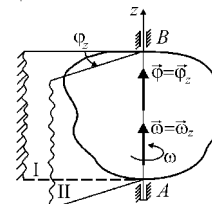


Рисунок 3.2 – Кінематичні характеристики при обертальному русі твердого тіла

Двогранний кут між нерухомою площиною – I і площиною – II, яка жорстко скріплена з тілом і обертається разом з ним називається *кутом повороту* тіла – φ_z . Закон обертання $\varphi_z = \varphi(t)$ – це рівняння обертального руху тіла навколо нерухомої осі z ($[\varphi] = \text{рад}$). Кут повороту можна виразити через число обертів N тіла за весь період обертання: $\varphi = 2\pi N$.

Кутову швидкість у техніці часто задають числом обертів за хвилину n : $\omega = \pi n / 30$.

Формули для визначення кінематичних характеристик твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі: *вектор кутової швидкості* $\vec{\omega} = \omega_z \vec{k}$, напрямлений уздовж осі обертання z (\vec{k} – орт осі z) у той бік, звідки обертання тіла видно проти стрілки годинника, характеризує швидкість зміни кута повороту тіла; проекція кутової швидкості на вісь обертання z – $\omega_z = \dot{\varphi}_z$; модуль кутової швидкості – $\omega = |\omega_z|$ ($[\omega] = \text{с}^{-1}$); *вектор кутового пришвидження* – $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \varepsilon_z \vec{k}$, напрямлений уздовж осі обертання, характеризує швидкість зміни кутової швидкості за часом; проекція кутового пришвидження на вісь обертання – $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}_z$; модуль кутового пришвидження – $\varepsilon = |\varepsilon_z|$ ($[\varepsilon] = \text{с}^{-2}$).

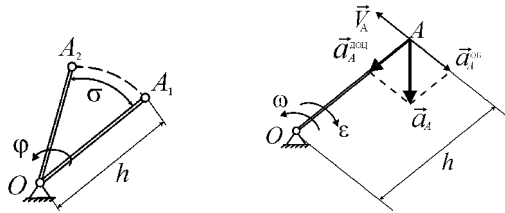


Рисунок 3.3 – Визначення кінематичних характеристик точки твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі

Вектор швидкості точки A $\vec{v}_A \perp h$ напрямлений відповідно до напрямку кутової швидкості ω ; $v_A = \omega \cdot h$ – модуль швидкості точки A , $\sigma = \varphi \cdot h$ – дугова координата точки A уздовж траєкторії (кола); h – відстань від даної точки A до осі обертання; $\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\text{об}} + \vec{a}_A^{\text{доц}}$ – *вектор пришвидження* точки A ; модуль пришвидження $a_A = \sqrt{(a_A^{\text{об}})^2 + (a_A^{\text{доц}})^2}$; $a_A^{\text{об}} = \varepsilon \cdot h$ – *обертальне пришвидження* точки A ; вектор $\vec{a}_A^{\text{об}} \perp h$ та напрямлений відповідно до напрямку кутового пришвидження ε ; $a_A^{\text{доц}} = \omega^2 \cdot h$ – *доцентрове пришвидження* точки A , вектор $\vec{a}_A^{\text{доц}}$ напрямлений вздовж відрізка OA від точки A до нерухомої точки O .

Плоскопаралельним рухом твердого тіла називають такий рух твердого тіла, при якому всі точки тіла рухаються у площинах, паралельних деякій нерухомій площині. Вивчення плоскопаралельного руху

можна звести до вивчення руху плоскої фігури в її площині, або відрізка прямої цієї фігури.

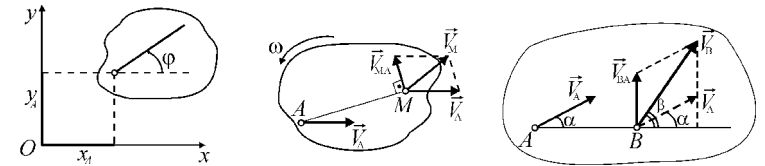


Рисунок 3.4 – Кінематичні характеристики при плоскопаралельному русі твердого тіла

Положення фігури в даний момент часу визначається координатами довільної її точки A , яку називають полюсом, і кутом φ повороту фігури навколо полюса: $x_A = f_1(t)$; $y_A = f_2(t)$; $\varphi = \varphi(t)$ (рівняння руху плоскої фігури), де A – точка, яку вибрано як полюс. Перші два рівняння характеризують поступальний рух фігури, при якому всі точки фігури рухаються так само, як і полюс, а третє – обертальний рух навколо полюса. Кутова швидкість і кутове пришвидження обертального руху фігури не залежать від вибору полюса.

Формули для визначення *швидкості* будь-якої точки тіла:

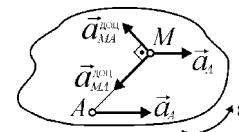


Рисунок 3.5 – Визначення пришвидження точки тіла при плоскопаралельному русі

$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}$ – швидкість будь-якої точки M фігури при її плоскому русі дорівнює геометричній сумі швидкості \vec{v}_A полюса A і швидкості \vec{v}_{MA} точки M в її обертальному русі навколо полюса: $v_{MA} = \omega \cdot MA$, де ω – кутова швидкість тіла; $\vec{v}_{MA} \perp MA$.

При плоскому русі фігури проекції швидкостей кінців A і B відрізка AB на його напрям рівні між собою: $\text{Пр}_{AB}(\vec{v}_A) = \text{Пр}_{AB}(\vec{v}_B)$, або $v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$, де α і β – кути між \vec{v}_A і \vec{v}_B і напрямом відрізка AB відповідно.

Пришвидження будь-якої точки M фігури при її плоскому русі дорівнює геометричній сумі пришвиджень полюса A і точки M в її обертальному русі навколо полюса:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}, \quad \vec{a}_{MA} = \vec{a}_{MA}^{\text{доп}} + \vec{a}_{MA}^{\text{об}}, \quad \vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^{\text{доп}} + \vec{a}_{MA}^{\text{об}},$$

де $a_{MA}^{\text{доп}} = \omega^2 \cdot MA$, $a_{MA}^{\text{об}} = \varepsilon \cdot MA$. При цьому $\vec{a}_{MA}^{\text{об}} \perp MA$ і напрямлене відповідно до напрямку кутового пришвидшення ε , $\vec{a}_{MA}^{\text{доп}}$ напрямлене уздовж відрізка MA від точки M до точки A ($MA = h$). Модуль вектора пришвидшення точки:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a^{\text{об}})^2 + (a^{\text{доп}})^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Плоский рух тіла у даний момент часу можна розглядати як обертальний рух навколо миттєвого центра обертання, або миттєвого центра швидкостей (МЦШ).

Миттєвий центр швидкостей – це точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.

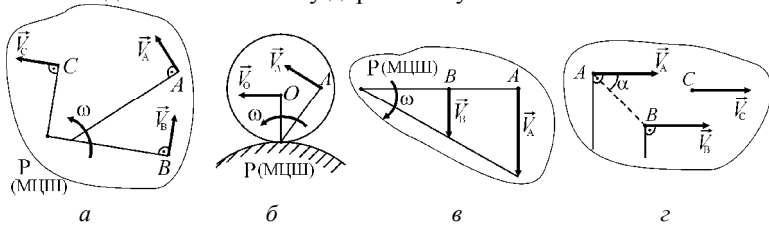


Рисунок 3.6 – Приклади визначення миттєвого центра швидкостей

Визначення положення МЦШ та з його допомогою кутової швидкості фігури і швидкості будь-якої точки фігури:

1. У загальному випадку МЦШ лежить у точці перетину перпендикулярів, проведених з двох точок плоскої фігури до їх швидкостей (рис.3.6а). Кутова швидкість ω плоскої фігури у кожний момент часу дорівнює відношенню швидкості будь-якої точки фігури до її відстані від МЦШ:

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP}.$$

Тому швидкість будь-якої точки плоскої фігури у кожний момент часу дорівнює добутку кутової швидкості ω на відстань від даної точки до МЦШ:

$$V_C = \omega \cdot CP \quad (\vec{V}_B \perp BP); \quad V_B = \omega \cdot BP \quad (\vec{V}_C \perp CP) \text{ і т.п.}$$

2. Фігура котиться без ковзання по нерухомій поверхні (рис.3.6б). В цьому випадку МЦШ знаходиться в точці дотику фігури з поверхнею:

$$\omega = \frac{V_0}{OP}, \quad V_A = \omega \cdot AP.$$

3. Якщо $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$, $\vec{v}_A \perp AB$ (рис.3.6в), то

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}, \quad \omega = \frac{v_A}{AB + BP} = \frac{v_B}{BP}.$$

4. При $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$, $\alpha \neq \pi/2$ (рис.3.6г), $M_C \rightarrow \infty$, $\omega = \frac{v_A}{\infty} = 0$,

$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C$. Це випадок миттєво-поступального руху.

Загальна *коваріантність* кінематичних рівнянь руху тіл означає, що записи виразів для визначення швидкості та пришвидшення точок тіла *не змінюють своєї векторної форми* при переході до будь-яких інших припустимих систем координат (узгоджених зі в'язями).

Найпростіші рухи тіл – це поступальний рух, обертання тіла навколо нерухомої осі, обертальний рух тіла з однією нерухомою точкою та усі вони є частковими випадками загального руху вільного тіла внаслідок накладених на тіла в'язей. Найпростіші рухи твердих тіл можуть перетворюватися за допомогою механізмів. *Механізм* – це механічна система тіл, яку призначено для *перетворення* руху одного або декількох тіл у необхідні рухи інших тіл. Поступальний рух перетворюється в інший поступальний рух за допомогою *блочних* механізмів. Обертальний рух відносно однієї осі перетворюється в обертальний рух відносно іншої осі за рахунок *зубчастих* або *фрикційних передач*. Поступальний рух перетворюється в обертальний чи навпаки за допомогою *зв'язкових* та *кривошипно-шатунних* механізмів або *пасових* передач. Комплексні перетворення найпростіших рухів охоплюють не менше трьох найпростіших рухів у будь-якій комбінації.

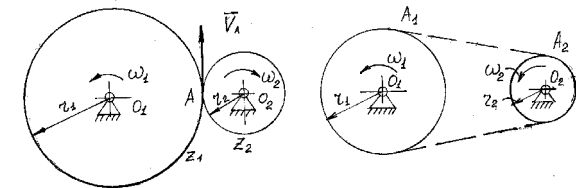


Рисунок 3.7 – Приклади перетворень найпростіших рухів твердих тіл

Для зубчастої передачі: $v_{A1} = v_{A2} = v_A$ або $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$. Звідси – $\omega_1 / \omega_2 = r_2 / r_1$. Кількості зубців z пропорційні радіусам коліс: $\omega_1 / \omega_2 = z_2 / z_1$; $\varepsilon_1 / \varepsilon_2 = z_2 / z_1$. Для пасової (ремінної) передачі: $a_{\tau 1} = a_{\tau 2} = a_{\tau A}$, звідки $\varepsilon_1 / r_2 = \varepsilon_2 / r_1$.

Питання для самоконтролю

1. Що називають поступальним рухом твердого тіла?
2. Що називають обертальним рухом тіла навколо нерухомої осі?
3. Як задати закон обертального руху тіла навколо нерухомої осі?
4. Що таке рівнозмінний та рівномірний обертальний рух тіла навколо нерухомої осі?
5. За якими формулами визначається швидкість та пришвидшення точки тіла при його обертальному русі?
6. Що називають плоскопаралельним рухом твердого тіла та як задається цей рух?
7. За якими формулами визначається швидкість та пришвидшення точки тіла, якщо його рух є плоскопаралельним?
8. Що називають миттєвим центром швидкостей (МЦШ) та за якими формулами з його допомогою визначається кутова швидкість фігури і швидкості будь-якої точки фігури, якщо рух тіла є плоскопаралельним?
9. Що означає коваріантність кінематичних рівнянь руху тіл, та які рівності для визначення швидкості та пришвидшення точок тіла не змінюють своєї векторної форми при переході к любым іншим припустимим системам координат (узгодженим зі в'язями)?
10. Що називають механізмом (передачею)?
11. За яких умов та за рахунок яких механізмів або передач поступальний рух перетворюється в інший поступальний рух; обертальний рух навколо осі перетворюється в обертальний рух відносно іншої осі; поступальний рух перетворюється в обертальний чи навпаки?

3.4. Лабораторні заняття

Дослідження найпростіших рухів тіл та їх перетворень

Завдання 1. Розглянемо механізм, який перетворює поступальний рух тіла у обертальний (рис.3.8). Тіло рухається поступально за законом (см) $x(t) = 30 + 10t^2$. Цей рух перетворює в обертальний рух шків 3, радіусом $R_3 = 10$ см. Визначіть швидкість та пришвидшення точки M ободу шківа – 3 у момент часу $t_1 = 1$ с.

Обертальний рух блока-шестерні 1 радіусом $R_1 = 10$ см разом із поступальним рухом кінця тросу, до якого тіло прикріплено, приводить до обертання двохступеневий блок із зовнішнім радіусом $R_2 = 30$ см та внутрішньою шестернею радіусом $r_2 = 20$ см пасової передачі з паралельними осями, що й забезпечує обертання шківу 3.

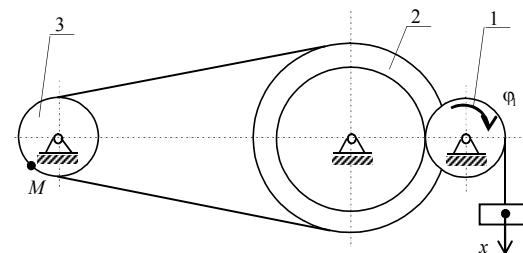


Рисунок 3.8 – Розрахункова схема механізма

Завдання 2. Розглянемо попередній механізм у разі його застосування для перетворення обертання шестерні 1 за законом $\varphi_1(t) = 5t^2$ рад в обертальний рух шківа 3 та у поступальний рух тіла. Визначіть у цьому разі в момент часу $t_1 = 2$ с швидкість та пришвидшення точки M ободу шківа 3 та швидкість поступального руху тіла.

Дослідження плоскопаралельного руху тіл

Завдання 3. Визначіть швидкість та пришвидшення точок A й B , які знаходяться на ободі двохступеневої котушки, що котиться без ковзання по прямолінійній колії (рис.3.9). Прийняти, що котушка має радіуси відповідно $R = 4$ см та $r = 2$ см, та в момент часу, що розглядається, швидкість центру O котушки дорівнює $v_0 = 10$ см/с.

The diagram shows a mechanical system with three wheels and a slider. Wheel 1 is at the center, with a vertical axis of rotation and a coordinate system (X, Y) centered at O_1 . Wheel 2 is to the left of wheel 1, with a horizontal axis of rotation and center O_2 . Wheel 3 is at the bottom left, with a vertical axis of rotation and center O_3 . A slider block is attached to wheel 3 and moves vertically along a guide. The slider's position is denoted by V_3 . The wheels are connected by a belt or chain. The angle of rotation of wheel 1 is φ . The angle of rotation of wheel 3 is α . The angle between the vertical axis of wheel 3 and the horizontal axis is γ . The points A, B, C, and D are marked on the wheels. The coordinate system (X, Y) is centered at O_1 .

вала електродвигуна. Запишемо координати точок $A(X_A, Y_A)$, $B(X_B, Y_B)$, $C(X_C, Y_C)$, $D(X_D, Y_D)$:

$$X_A = OA \cos \varphi; Y_A = OA \sin \varphi; \varphi = 3t^2; \beta = \arcsin(Y_A / AB);$$

$$X_B = X_A + AB \cos \beta; Y_B = 0; X_C = X_A + AC \cos \beta; Y_C = Y_A - AC \sin \beta;$$

$$\alpha = (OA + AB - X_B) / R; Y_D = R \sin \alpha; X_D = X_B + R \cos \alpha;$$

За координатним способом знайдемо кінематичні характеристики руху тіл кривошипно-шатунного механізму O_1A , AB і колеса 4:

$$\omega_{OA} = \dot{\varphi}; \varepsilon_{OA} = \dot{\omega}_{OA}; \omega_{AB} = \dot{\beta}; \varepsilon_{AB} = \dot{\omega}_{AB}; \omega_K = \dot{\alpha}; \varepsilon_K = \dot{\omega}_K;$$

та швидкості і пришвидшення їх точок A, B, C, D :

$$v_A = \sqrt{\dot{X}_A^2 + \dot{Y}_A^2}; a_A = \sqrt{\ddot{X}_A^2 + \ddot{Y}_A^2}; v_B = \sqrt{\dot{X}_B^2 + \dot{Y}_B^2}; a_B = \sqrt{\ddot{X}_B^2 + \ddot{Y}_B^2};$$

$$v_C = \sqrt{\dot{X}_C^2 + \dot{Y}_C^2}; a_C = \sqrt{\ddot{X}_C^2 + \ddot{Y}_C^2}; v_D = \sqrt{\dot{X}_D^2 + \dot{Y}_D^2}; a_D = \sqrt{\ddot{X}_D^2 + \ddot{Y}_D^2};$$

Комп'ютерне визначення кінематичних характеристик руху тіл та точок електромеханічного приводу. За допомогою комп'ютерного моделювання досліджуються векторні характеристики руху тіл та точок механізмів, що перетворюють обертальні рухи вала і ротора електродвигуна в необхідні найпростіші рухи різних тіл електромеханічного приводу; досліджується незалежність кінематичних характеристик від способу завдання закону руху та запису рівностей для визначення швидкостей та пришвидшень тіл та їх точок у припустимих системах координат (узгоджених із в'язями); установлюються властивості траєкторій точок, швидкостей й пришвидшень точок, швидкостей й пришвидшень тіл механічної системи.

Завдання на самостійну роботу: студентам пропонується самостійно підготувати свій файл вихідних даних ПК КіДиМ за прикладом, напередодні виданим викладачем.

3.6. Теоретичні відомості зі статyki. Типи в'язей та їхні реакції.

Зазвичай тіло, яке перебуває у рівновазі, є закріпленим за допомогою інших тіл, що називають *в'язями*, *закріпленнями*, або *опорами*. Сили, із якими опори діють на тіло, що розглядається, називають *силами реакції* або *реакціями*.

Сили реакцій в'язей, накладених на тіло (систему тіл), залежать від їхнього типу:

1. *Гладка поверхня* – поверхня, при визначенні реакції якої силами тертя можна нехтувати. Вектор реакції гладкої поверхні прикладений у точці дотику тіла з поверхнею і направлений по нормалі до поверхні. У разі опори тіла на уступ або вістря – тобто точкової опори, гладкою вважається поверхня самого тіла, а вектор реакції прямує по нормалі до поверхні тіла.

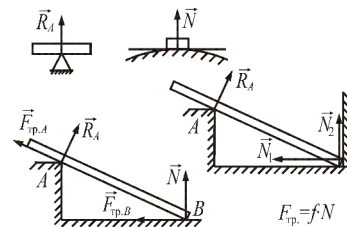


Рисунок 3.12 – Гладка та шорстка (негладка) поверхні

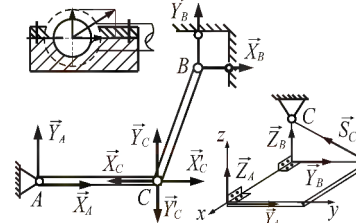


Рисунок 3.14 – Шарнірно-нерухома опора (циліндричний шарнір) у площині та у просторі

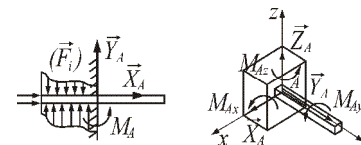


Рисунок 3.16 – Затискні опори (жорстке затискання) у площині та у просторі

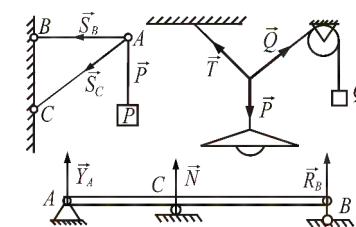


Рисунок 3.13 – Невагомий стрижень, гнучка нить (трос, ланцюг, канат тощо), шарнірно-рухома опора

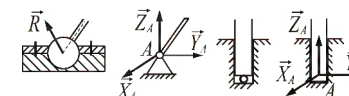


Рисунок 3.15 – Кульова опора, сферичний шарнір, підп'ятник

2. *Шорстка (негладка) поверхня* – поверхня, де за умовою завдання силами тертя нехтувати не можна. Ця реакція є сукупністю двох сил – нормальної реакції поверхні і сили тертя в дотичній площині тіла, у бік, протилежний можливому переміщенню тіла по поверхні, і визна-

чається через добуток коефіцієнта тертя ковзання (коефіцієнта зчеплення) на величину сили нормальної реакції поверхні ($F_{\text{тр}} = fN$). Величина f (коефіцієнта тертя) визначається лише при досягненні силою тертя її максимального значення.

3. *Невагомий стрижень з ідеальними шарнірами* на кінцях – в'язі, що ідеалізуються, у вигляді прямолінійного або криволінійного стрижня, з шарнірами в точках його кріплення до інших тіл і з вагою, якою в задачі можна нехтувати. В ідеальних шарнірах відсутнє тертя. Реакція стрижня позначається вектором, та тому що характер дії на стрижень зазвичай невідомий, то вектор реакції стрижня прийнято спрямовувати від вузла його кріплення до тіла, вважаючи стрижень за розтягнутий.

4. *Гнучка нитка (трос, канат, мотузок, ланцюг тощо)* – в'язь, яка може працювати лише тоді, коли вона натягнута. Вектор реакції нитки приймають прикладеним у точці, де нитка прив'язана до тіла, рівновага якого розглядається, і направляють уздовж нитки.

5. *Шарнірно-рухома опора* – опора, що дозволяє точці тіла, яка пов'язана з опорою, переміщатися без тертя уздовж якої-небудь поверхні. Реакція рухливої опори прямує по нормалі до поверхні, уздовж якої може переміщатися опора.

6. *Шарнірно-нерухома опора або циліндричний шарнір* – в'язь, що не дозволяє точці тіла, яка скріплює її з такою опорою, переміщатися в площині, перпендикулярній до осі обертання шарніра, але дозволяє тілу за відсутності інших в'язей обертатися відносно цієї осі. Умовно мається на увазі, що в шарнірі відсутнє тертя. Конструктивним виконанням шарнірно-нерухомої опори можуть бути і підшипники ковзання, і підшипники кочення, і просто пальцеві з'єднання тощо.

Сила реакції шарнірно-нерухомої опори розташована в площині, перпендикулярній осі обертання шарніра; проходить через центр шарніра; невідома ні за величиною, ні за напрямом.

7. *Кульова опора або сферичний шарнір* – в'язь, що не дозволяє одній з точок тіла переміщатися ні в одному з напрямків, а дозволяє тілу повертатися в певних межах щодо будь-якої з координатних осей, які проходять через цю точку.

Реакція опори – невідома по величині і напрямку в просторі сила. Її компоненти по осях координат і є шуканими величинами.

8. *Підп'ятник* – в'язь, що є комбінацією циліндричного шарніра і опорної площини. Реакція підп'ятника як і у сферичного шарніра визначається за її складовими, направленими уздовж трьох координатних осей.

9. *Затискні опори*, звані також жорсткі затиснення, – це умовна назва в'язей, що перешкоджають закріпленому тілу переміщатися в будь-якому з напрямів і повертатися навколо будь-якої з координатних осей. Прикладами таких опор є: закладені у стіну будинку плити підвіконь або балконів, кронштейни для кріплення труб, балок і рам, звичайні вбиті у стіну болти, цвяхи і інше. Невідому силу реакції визначають через її компоненти, а момент невідомої пари сил прийнято називати моментом затискання.

Крім жорсткого затиснення може зустрітися і ковзне затиснення – в'язь, що не дозволяє закріпленому тілу повертатися до точки закріплення і дозволяє переміщуватись лише в одному відомому напрямі.

Тіла можуть бути навантаженими *зосередженими силами* та *розподіленими силами*. *Розподілені сили* розрізняють як навантаження, розподілені за деякою площею, і навантаження, розподілені за деякою довжиною. Характеризуються ці навантаження інтенсивністю p і q , вимірюваною в одиницях тиску, Н/м^2 та Н/м . *Заміну розподілених сил* іншою, наприклад, зосередженою силою, здійснюють за умов їхньої статичної еквівалентності.

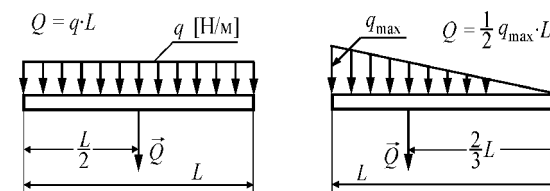


Рисунок 3.17 – Приклади розподілених сил

Найбільш типові випадки заміни зосередженою силою рівномірно розподіленого навантаження і навантаження, що змінюється за лінійним законом, подані на рисунках. Графічне зображення зміни інтенсивності навантаження за довжиною прийнято називати *епурою*. Величина сили дорівнює площі епюри, а лінія дії сили проходить через центр тяжіння площі епюри.

Рівняння рівноваги – це аналітичні рівності умов рівноваги конкретної системи тіл, в які вводяться невідомі параметри: реакції в'язей, сили, віддалі, кути тощо.

Векторні умови рівноваги плоскої системи сил є необхідними й достатніми умовами для рівноваги плоскої довільної системи сил, за якими *геометрична сума* всіх сил (головний вектор сил) дорівнює нулю і *алгебраїчна сума моментів* всіх сил системи відносно будь-якої точки, яка лежить у площині дії сил, також дорівнює нулю, тобто:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \vec{R}_i = 0, \sum_{i=1}^n (M_o(\vec{F}_i) + M_o(\vec{R}_i)) = 0.$$

Векторні умови рівноваги просторової системи сил є необхідними й достатніми умовами для рівноваги просторової довільної системи сил, за якими *геометрична сума* всіх сил (головний вектор сил) дорівнює нулю і *геометрична сума моментів* (головний вектор моментів сил) всіх сил системи відносно довільної точки також дорівнює нулю, тобто:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \vec{R}_i = 0, \sum_{i=1}^n (\vec{M}_o(\vec{F}_i) + \vec{M}_o(\vec{R}_i)) = 0.$$

Для складання рівнянь рівноваги необхідно вибрати тіло або систему тіл, прийняти до розгляду вектори активних сил чи пар сил (моменти) й відповідні в'язям вектори реакцій та пар, визначати проекції сил на осі координат і моменти сил щодо вибраних точок і осей, скласти рівняння рівноваги.

Проектування векторів сил при складанні рівнянь рівноваги доцільно постійно застосовувати строго певний лад розгляду векторів сил як при їх проектуванні на осі координат, так і при визначенні їх моментів: 1) проекція вектора на вісь дорівнює добутку модуля вектора на косинус кута між напрямом вектора і позитивним напрямом осі; 2) проекція вектора на вісь є скалярною величиною і може бути як позитивною, так і негативною; 3) знак проекції визначається знаком косинуса кута, що утворює напрям вектора і позитивним напрямом осі.

На розрахункових схемах, як правило, вибирають гострі кути між лінією дії вектора і віссю (або паралельною осі лінією). Тому знак проекції встановлюють співставленням напрямів проєктованих векторів і осей. Якщо напрям вектора направлено в ту ж сторону, що і вісь, то проекція вектора позитивна, інакше – негативна.

Якщо проектується просторовий вектор, то дві його проекції знаходяться за допомогою подвійного проектування. При цьому спочатку визначаються проекції вектора на вісь і перпендикулярну до неї площину, а потім проекції вектора вже на осі площини. Кут між проекцією вектора на площину і однією з осей площини має бути або відомий, або визначатися з геометрії.

При визначенні моментів сил відносно точок і осей при складанні рівнянь рівноваги доцільно постійно застосовувати строго означений лад розгляду: 1) моментом сили щодо точки називається добуток модуля сили на її плече; 2) момент сили вважається за позитивний, якщо сила прагне обернути тіло щодо точки проти годинникової стрілки і негативним – якщо за годинниковою стрілкою; 3) момент сили щодо точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через точку.

Теорема Варіньона – це твердження про те, що момент рівнодійної системи сил відносно будь-якої точки дорівнює сумі моментів сил системи відносно цієї ж точки. Застосовують цю теорему так: силу розкладають на складові по координатних осях і визначають момент сили як суму алгебраїчних моментів її складових.

Моментом сили відносно осі називається узятий з відповідним знаком добуток проекції сили на площину, перпендикулярну осі, на плече проекції щодо точки перетину осі з площиною. Момент сили відносно осі дорівнює нулю, коли сила паралельна осі або коли лінія дії сили перетинає вісь, або інакше, коли вектор сили і вісь розташовані в одній площині.

Момент сили вважається за позитивний, якщо з позитивного напрямку осі видно, що сила прагне обернути тіло проти годинникової стрілки.

Рівняння моментів сил складається завжди щодо точки, в якій перетинаються лінії дії найбільшого числа невідомих сил. Це або точка кріплення тіла до шарнірно-нерухомої опори, або точка, де балка закладена у стіну. Правильність складання рівняння перевіряється порівнянням результату розрахунку щодо різних точок, визначаючи з них дві невідомі сили.

Перевірка на статичну визначеність, тобто можливість розв'язання задачі методами статyki, полягає у зіставленні кількості невідомих у даному завданні з числом рівнянь рівноваги, які можна скласти для даної системи тіл і сил. Для цієї перевірки необхідно знати

число аналітичних умов рівноваги кожної з можливих систем сил, добре уявляти собі, яка система сил діє на кожне з тіл. При вирішенні завдань на складені конструкції у процесі такої перевірки вибирають раціональний план розв'язання задачі.

Складені конструкції – це конструкції, в яких розглядається рівновага системи зв'язаних один з одним тіл. З'єднання тіл між собою мають два основних варіанти:

1) одне з тіл у системі вільно спирається на інше тіло і у цьому варіанті напрям сил взаємодії (внутрішні сили реакцій в'язей між тілами) відомі, бо сили взаємодії направлені за нормаллю або до поверхні, на яку спираються, або якою спираються, або до обох разом;

2) тіла з'єднуються між собою шарніром. У цьому випадку напрям сили, що діє в шарнірі з боку одного тіла на інше, невідомий ні за величиною, ні за напрямом.

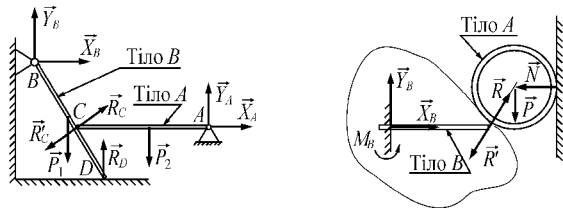


Рисунок 3.18 – Вільне обпирання двох тіл

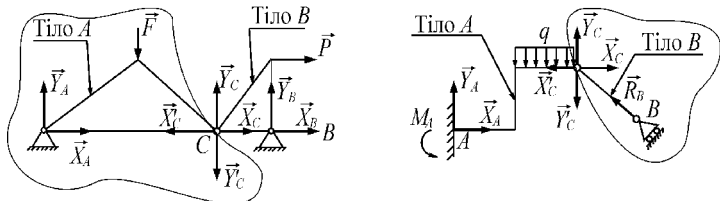


Рисунок 3.19 – Шарнірне з'єднання

Схеми розв'язання задач для плоских складених конструкцій:

1) Складаються розрахункові схеми для сил, що діють на кожне з тіл. Для кожного з тіл записуються рівняння рівноваги й з шести рівнянь знаходяться всі шукані невідомі величини. Рівняння рівноваги для окремих часток конструкції складати простіше, ніж для всієї конструкції.

2) Складається розрахункова схема для всієї конструкції і розрахункова схема для тіла, на яке діє простіша система сил. Рівняння рівноваги записуються для даного тіла і для всієї конструкції. При складанні рівнянь рівноваги для всієї конструкції система внутрішніх сил у шарнірі як система взаємно урівноважених сил, просто не враховується.

Рівновагу за наявності сил тертя розглядають у положенні граничної рівноваги, тобто в мить, коли сила тертя досягає максимальної величини і може бути визначена за відомим законом Амонтона – Кулона ($F_{\text{тр. max}} = fN$), де N – сила нормального тиску тіла на площину, f – величина коефіцієнта тертя є або заданою величиною, або шуканою. У першому випадку визначається положення граничної рівноваги конструкції або тіла під дією заданих сил і визначуваної за заданими силами величини сили тертя. У другому випадку, виходячи із заданого в умові завдання положення граничної рівноваги конструкції або тіла, за відомими силами визначається необхідна для забезпечення рівноваги сила тертя, а потім і коефіцієнт тертя.

Положення центра ваги будь-якого тіла складної форми можна визначити так: 1) розбити тіло на деяку кількість часток – n , положення центрів тяжіння яких відомі; 2) визначити вагу (об'єму, площі, або довжини) кожної частки P_i і координати центрів тяжіння виділених часток x_{ci}, y_{ci} уздовж відповідних осей; 3) ці величини підставити в формулу.

$$P = \sum_{i=1}^n P_i, \quad x_{cT} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n x_{ci} P_i, \quad y_{cT} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n y_{ci} P_i, \quad z_{cT} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n z_{ci} P_i.$$

Питання для самоконтролю

1. Що розуміють під розрахунковою схемою тіла (або системи тіл, конструкції), рівновага якого розглядається? Як поділяють сили й вибирають типи і напрями сил реакцій накладених на тіло в'язей? Для чого на схемі вибирають систему координатних осей?
2. Які сили вважають зосередженими, а які – розподіленими? За яких умов треба замінювати розподілені навантаження зосередженими силами?
3. Як визначати положення центра ваги будь-якого тіла?
4. Які типи в'язей ви знаєте? Покажіть реакції цих в'язей на рисунку.

5. Як розрізняються розподілені навантаження? Чим характеризуються ці навантаження і за якими одиницями задають їхні інтенсивності?

6. Як виконують заміну розподілених сил зосередженими силами у випадках рівномірно розподіленого навантаження і навантаження, що змінюється за лінійним законом? Покажіть це на рисунку.

7. Що прийнято називати епюрою сил?

8. Як визначають сили реакцій, накладених на тіло (систему тіл), залежно від типу в'язей:

- гладка поверхня?
- шорстка (негладка) поверхня? Що таке сила тертя, коефіцієнт тертя ковзання (коефіцієнт зчеплення)? Як виглядає закон тертя при досягненні його максимального значення?
- невагомий стрижень з ідеальними шарнірами на кінцях?
- гнучка нитка?
- шарнірно-рухома опора?
- шарнірно-нерухома опора або циліндричний шарнір? Яке конструктивне виконання шарнірно-нерухомої опори в техніці?
- кульова опора або сферичний шарнір?
- підп'ятник?
- затискні опори, звані також жорсткі затиснення?
- ковзні закладення?

9. З якою метою проводять перевірку на статичну визначеність?

10. Що таке рівняння рівноваги? Як записуються векторні умови рівноваги плоскої системи сил?

11. Що таке векторні умови рівноваги просторової системи сил?

12. Як скласти рівняння рівноваги тіла або системи тіл?

13. Як проектувати вектори сил при складанні рівнянь рівноваги плоскої системи сил? Як установити знак проекції вектора сили?

14. Як проектувати просторові вектори сил при складанні рівнянь рівноваги просторової системи сил? Як установити знак проекції вектора сили?

15. Як визначити моменти сил відносно точок і осей при складанні рівнянь рівноваги?

16. Як застосувати теорему Варіньона для визначення моментів сил?

17. Що таке момент сили відносно осі? Яким є позитивний момент сили?

18. Як вибирати точку для складання рівняння моментів сил?

19. Що таке складені конструкції? Як поділяють з'єднання тіл між собою у складених конструкціях?

20. Які застосовують схеми розв'язання задач для плоских складених конструкцій?

21. Як визначити рівновагу тіл за наявності сил тертя?

22. Що таке стійкість тіл при перекиданні та як визначити коефіцієнт стійкості? Які умови необхідні для величини коефіцієнта стійкості при забезпеченні стійкості положення механізмів?

23. Які величини потрібні для визначення положення центра ваги будь-якого тіла складної форми?

3.7. Лабораторні заняття

Розв'язання задач статки тіл, на які діє збіжна система сил

Завдання 1. Від точки A вертикального стовпа OA (ідеальний стрижень) висотою 6 м, що опертий на фундамент, натягнуті вздовж осі

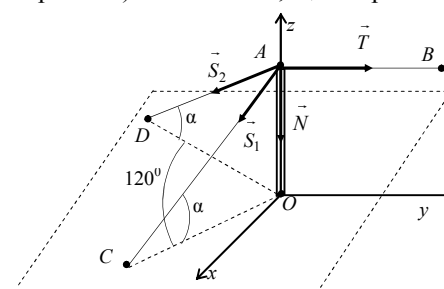


Рисунок 3.20 – Розрахункова схема до завдання 1

Оу дрiт й обтяжнi троси AC i AD , якi закрiпленi на горизонтальнiй площинi фундаменту у точках C i D на вiдстанi $OC = OD = 4,5$ м, так що кут мiж лiнiями OC i OD складає 120° . Виходячи з умов рiвноваги стовпа визначте сили натягу тросiв S_1 , S_2 та вертикальну силу притиснення стовпа N , якщо дрiт натягнуто з силою $T = 300$ Н.

Завдання 2. Три нахиленi до горизонту пiд кутами $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$ iдеальнi стрижнi AD , BD i CD з'єднанi у точцi D , до якої пiд кутом $\varepsilon = 30^\circ$ з вiссю Oy протягнуто трос, перекинутий через нерухомий блок E . На кiнцi блока E закрiплено вантаж Q , що важить 100 кН. Виходячи з умов рiвноваги стрижневої системи, визначте сили R_{AD} , R_{BD} , R_{CD} ,

що діють на стрижні, та силу натягу троса T . Тертя у блоці нехтувати.

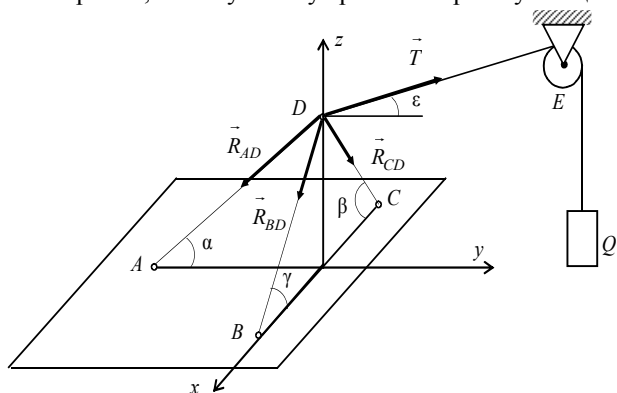


Рисунок 3.21 – Розрахункова схема до завдання 2

Розв'язання задач статички плоских конструкцій

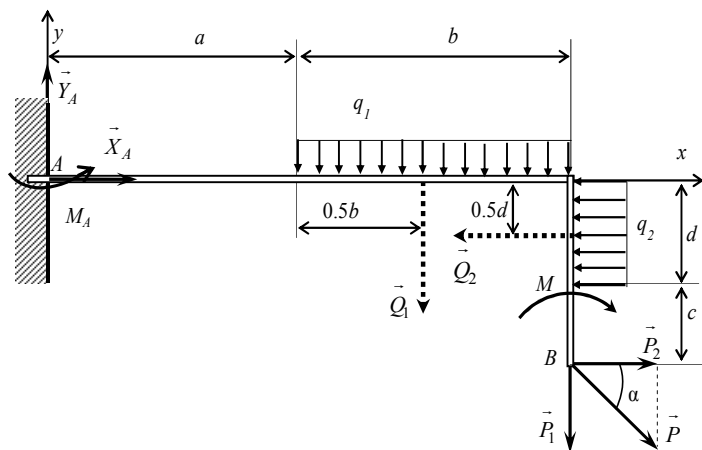


Рисунок 3.22 – Розрахункова схема до завдання 3

Завдання 3. Стрижнева плоска конструкція на краю A має жорстке затиснення та на другому її краю B діє під кутом до горизонту $\alpha = 30^\circ$ зосереджена сила $P = 30$ кН. На вертикальну частину конструкції діє

пара сил з моментом $M = 8$ кН·м, а на горизонтальній та вертикальній частинах конструкції діють розподілені вздовж ділянок довжиною $b = 3$ м і $d = 2$ м навантаження інтенсивністю $q_1 = 2$ кН/м і $q_2 = 5$ кН/м відповідно. Виходячи з умов рівноваги плоскої конструкції визначте в жорсткому затисненні реакції M_A, X_A, Y_A , прийняти $a = 2$ м, $c = 1$ м.

Завдання 4. Ідеальний стрижень AD на краю A закріплено в нерухомому шарнірі та на другому його краю B під кутом до горизонту $\epsilon = 60^\circ$ протягнуто трос, перекинутий через нерухомий блок E , на його кінці закріплено вантаж P , що важить 6 кН. На конструкцію діє розподілене вздовж ділянки довжиною 2 м навантаження інтенсивністю $q = 4$ кН/м. Стрижень AD закріплено нахиленим під кутом до вертикалі $\alpha = 45^\circ$ стрижнем BC , краї якого в точках B і C шарнірно з'єднано зі стрижнем й нерухомою опорою відповідно. Виходячи з умов рівноваги стрижневої системи, визначте силу натягу троса в точці B і реакції X_A, Y_A у шарнірі A стрижня AB та реакцію R_{BC} стрижня CB у шарнірі B . Тертя у блоці нехтувати.

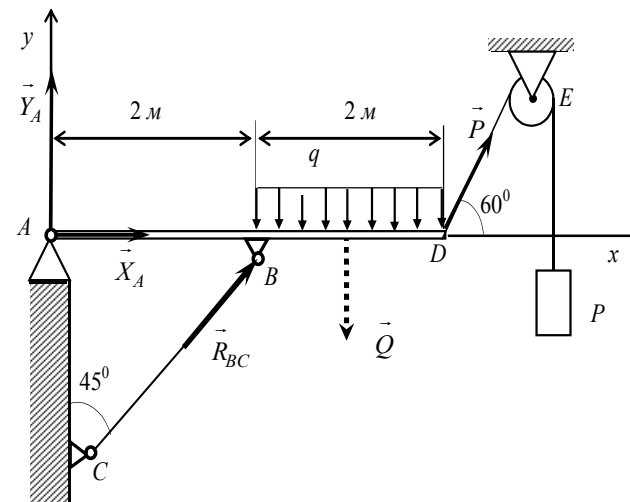


Рисунок 3.23 – Розрахункова схема до завдання 4

Розв'язання задач статки тіл при дії просторової системи сил

Завдання 5. Нерухомий вертикальний вал розміщено у підп'ятнику A та у циліндричному шарнірі (підшипнику) B . До вала жорстко прикріплені стрижні DC і KE , що розміщені в площинах, перпендикулярних осі z та напрямлені вздовж координатних осей x та y , відповідно. Вал навантажено зосередженими силами \vec{P} , $|\vec{P}| = 2 \text{ кН}$ та \vec{Q} , що діють у площині, перпендикулярній осі x та є прикладеними відповідно у точці E під кутом $\gamma = 30^\circ$ до осі стрижня KE та у точці C під кутом $\beta = 60^\circ$ до осі, перпендикулярній стрижню DC . Жорстко прикріплений до вала стрижень LG , який розташований у площині yOz та напрямлено під кутом $\alpha = 30^\circ$ до осі y , навантажений на краях L і G парою рівних та протилежно напрямлених сил $\vec{F}' = -\vec{F}''$, які утворюють пару сил з вектором-моментом пари \vec{M} , $|\vec{M}| = 0,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$, що є напрямленим перпендикулярно стрижню LG під кутом $\alpha = 30^\circ$ до осі z . Виходячи з умов рівноваги невагомому валу визначте величину сили \vec{Q} , реакції $-X_A, Y_A, Z_A$ у підп'ятнику A та $-X_B, Y_B$ у підшипнику B .

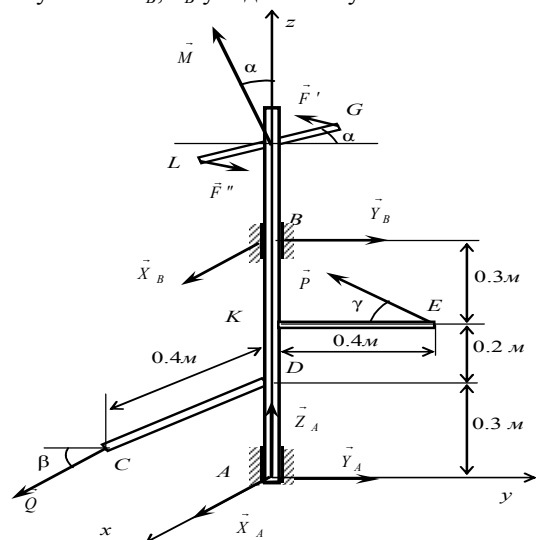


Рисунок 3.24 – Розрахункова схема до завдання 5

Завдання 6. Край A стрижневої рами ABC , що розташована в горизонтальній площині xAy , жорстко затиснений, на другому її краї C прикладена зосереджена сила \vec{P} , $|\vec{P}| = 4 \text{ кН}$, яка діє у площині рами ABC під кутом $\alpha = 30^\circ$ до осі стрижня рами BC та в цій же площині перпендикулярно стрижню CB протягнуто горизонтальний трос, який перекинута через нерухомий блок D , на кінці якого вертикально підвішено вантаж Q , що важить 2 кН . До рами жорстко прикріплено стрижень KE , який розташований у площині zAy та напрямлено під кутом $\beta = 60^\circ$ до осі y . На краях K і E цього стрижня прикладені дві рівні та протилежно напрямлені сили $\vec{F}' = -\vec{F}''$, які розташовані в нахилений під кутом $\beta = 60^\circ$ до осі y площині xy утворюють пару сил з вектором-моментом пари \vec{M} , $|\vec{M}| = 0,2 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Виходячи з умов рівноваги стрижневої рами визначте реакції $-X_A, Y_A, Z_A, M_{Ax}, M_{Ay}, M_{Az}$ у жорсткому затисненні A рами і силу натягнення тросу в точці C . Тертя у блоці нехтувати.

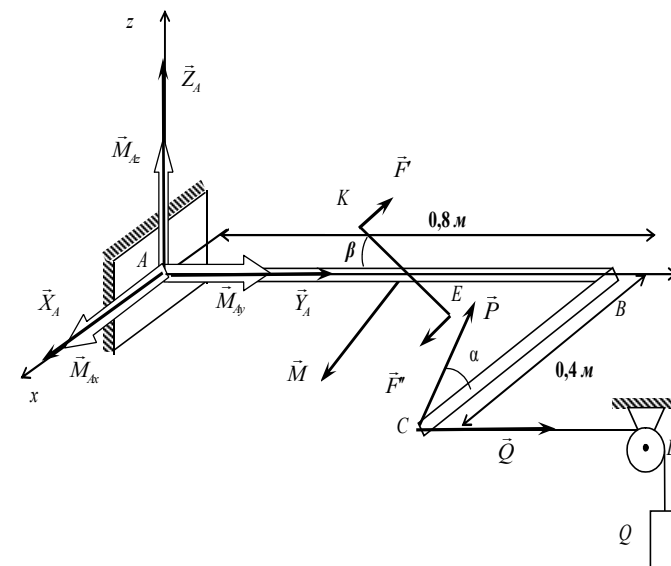


Рисунок 3.25 – Розрахункова схема до завдання 6

3.8. Лабораторна робота 2. Визначення реакцій в'язей механічної системи

Мета роботи – вивчення закономірностей рівноваги системи матеріальних тіл й змін реакцій в'язей при переході до інших видів в'язей та активних сил.

Об'єкт досліджень – механічні системи тіл та реакції типових в'язей (опори, стрижні, шарніри та інші), які при дії на тіла активних сил (збіжних, плоских, просторових) утримують матеріальну систему в рівновазі.

Предмет досліджень – властивості реакцій в'язей системи матеріальних тіл й зміни реакцій в'язей при переході до інших видів в'язей та активних сил.

Методи досліджень містять аналітичні та комп'ютерні обчислювання.

Визначення реакцій в'язей електромеханічного приводу при статичній рівновазі під дією просторової системи активних сил.

Розглянемо електромеханічний привід, який перетворює обертальний рух вала електродвигуна *1* у поступальний рух вантажу *4*.

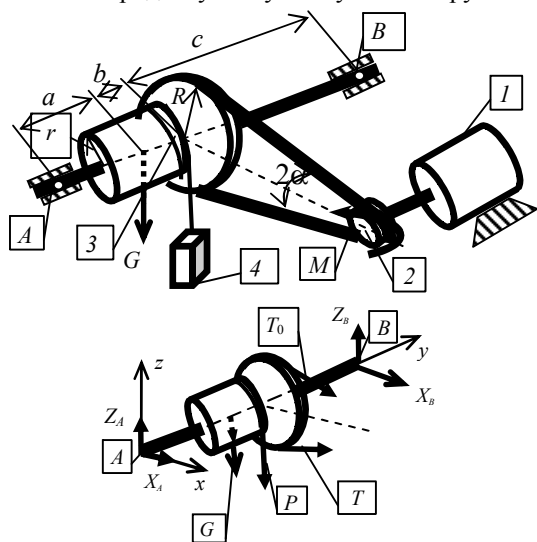


Рисунок 3.26 – Розрахункова схема

При рівномірному обертанні вала електродвигуна *1* сили натягу ведучого (тягового) *T* і веденого T_0 ременів пасу, які направлені під кутами α до горизонту, відповідають співвідношенню $T/T_0 = 2$ та моменту $M = (T - T_0) R$, що передається від ротора *2* двоступеневому барабану *3*, вагою *G*, який закріплено на жорсткому валі в циліндричних підшипниках *A*, *B*. На уступ барабана радіусом *r* намотується трос із вантажем *4*, вагою *P*.

Виходячи з умов рівномірного обертання вала визначте значення моменту *M* і реакцій циліндричних підшипників X_A, Z_A, X_B, Z_B для розглянутого електромеханічного приводу, прийнявши: $a = 0,6$ м, $b = 0,3$ м, $c = 0,6$ м, $r = 0,2$ м, $R = 0,4$ м, $G = 100$ кН, $P = 800$ кН, $\alpha = 20^\circ$.

Дослідити вплив ваги *P* (0,800) кН вантажу *4* на величини моменту *M* і реакції циліндричних підшипників – X_A, Z_A, X_B, Z_B та сили натягу ведучого ременя пасу *T*. Установити вплив кута між напрямками ременів пасу α ($0^\circ \dots 65^\circ$) на ці величини при двох рівнях ваги *P* (400,800) кН вантажу *4*.

Аналітично визначимо реакції в'язей електромеханічного приводу X_A, Z_A, X_B, Z_B при статичній рівновазі під дією просторової системи активних сил: *G*, *P*, *T*, T_0 та зрівноваженого моменту *M*. Виберемо систему координат *Oxy* з центром в точці *A* та запишемо рівняння рівноваги вала *AB* відносно невідомих M, X_A, Z_A, X_B, Z_B :

$$\begin{aligned} \sum P_{kx} &= 0; \quad X_A + X_B + (T + T_0) \cos \alpha = 0; \\ \sum P_{ky} &= 0; \quad -P - G + Z_A + Z_B + (T - T_0) \sin \alpha = 0; \\ \sum M_x(\vec{P}_k) &= 0; \\ -P(a + b) - Ga + (T - T_0) \sin \alpha (a + b) + Z_B(a + b + c) &= 0; \\ \sum M_y(\vec{P}_k) &= 0; \quad -Pr - (T - T_0) R = 0; \\ \sum M_z(\vec{P}_k) &= 0. \quad -X_B(a + b + c) - (T + T_0) \cos \alpha (a + b) = 0. \end{aligned}$$

Розглянута система рівнянь є статично визнаною, бо з п'яти алгебраїчних рівнянь однозначно одержимо п'ять невідомих величин: M, X_A, X_B, Z_A, Z_B .

Комп'ютерне визначення реакцій в'язей електромеханічного приводу при статичній рівновазі під дією просторової системи активних сил. За допомогою комп'ютерного моделювання підтверджуються теоретичні положення статyki про умови рівноваги (відносного покою) і пасивність реакцій в'язей системи матеріальних тіл електромеханічно-

го приводу. Досліджується вплив ваги P вантажу при рівномірному обертанні валу на величини моменту M і реакції циліндричних підшипників та сили натягу ведучого ременя пасу. Установлюється вплив зміни виду в'язей з різними кутами між напрямками ременів пасу на ці величини при різних рівнях ваги вантажу P .

Завдання на самостійну роботу: студентам пропонується самостійно підготувати свій файл вихідних даних ПК КіДиМ за прикладом, напередодні виданим викладачем.

4. МОДУЛЬ 2 – ДИНАМІКА

Для підготовки до лабораторних занять рекомендується ознайомитись з наступними стислими теоретичними положеннями та відповісти на питання самоконтролю.

4.1. Теоретичні відомості

Динаміка матеріальної точки

Основний закон динаміки (основне рівняння динаміки, другий закон Ньютона). Пришвидження матеріальної точки \bar{a} пропорційне прикладеній до неї силі або рівнодійній декількох сил \bar{F} , прикладених до точки, і спрямоване вздовж вектора сили. Якщо масу m матеріальної точки вважати згідно з уявленнями класичної механіки сталою, то закон матиме вираз

$$m\bar{a} = \bar{F}, \quad (1)$$

де: $\bar{F} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$ – сила, що є рівнодійною n активних сил і сил реакцій в'язей.

Диференціальне рівняння руху точки у векторній формі має вигляд:

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i, \quad (2)$$

де $\bar{a} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}$ – прискорення матеріальної точки.

Диференціальні рівняння руху точки у координатній формі записують у проєкціях на три відповідні осі координат x, y, z :

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad m\ddot{y} = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad m\ddot{z} = \sum_{i=1}^n F_{iz}, \quad (3)$$

де прискорення точки та алгебраїчні суми проєкцій усіх сил на осі визначаються у проєкціях на ці ж осі:

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad a_y = \ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2}; \quad a_z = \ddot{z} = \frac{d^2 z}{dt^2}, \quad (4)$$

Диференціальні рівняння руху точки у натуральній формі записують у проекціях на дотичну $\bar{\tau}$, нормаль \bar{n} та на бінормаль \bar{b} :

$$m \frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n F_i^{\tau}, \quad m \frac{v^2}{\rho} = \sum_{i=1}^n F_i^n, \quad 0 = \sum_{i=1}^n F_i^b, \quad (5)$$

де швидкість та пришвидшення матеріальної точки у проекціях на ці ж осі дорівнюють:

$$v = v^{\tau} = \frac{ds}{dt}, \quad a^{\tau} = \frac{dv}{dt}; \quad a^n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a^b = 0,$$

де ρ – радіус кривини траєкторії, по якій рухається точка. Останнє рівняння у (5) є рівнянням статки у проекції на бінормаль.

Дві задачі динаміки матеріальної точки формулюються так:

За заданими масою матеріальної точки та законом її руху визначити силу або рівнодійну силу, яка діє на матеріальну точку, – *перша задача динаміки точки*;

Згідно із заданими силами, які діють на матеріальну точку заданої маси, і початковими умовами руху (швидкість і положення в початковий момент) визначити закон її руху – *друга або основна задача динаміки точки*.

Методи розв'язання першої задачі динаміки матеріальної точки зводиться до диференціювання рівнянь руху, а другої – до інтегрування диференціальних рівнянь руху при заданих початкових умов руху (координат і проекцій швидкості точки у початковий момент часу) матеріальної точки.

Динаміка механічної системи

Механічна система (матеріальна система) – це сукупність матеріальних точок та (або) абсолютно твердих тіл, положення і рух яких взаємопов'язані і взаємообумовлені.

Сили, які діють на матеріальну систему, поділяються на *внутрішні* \bar{R}_k та *зовнішні* \bar{F}_k^e . Внутрішні сили – це сили взаємодії між точками самої матеріальної системи. Зовнішні сили – це сили, які діють на точки системи з боку інших точок, які не належать даній матеріальній системі. Внутрішні сили діють на матеріальну систему попарно як дія і протидія ($\bar{R}_k = -\bar{R}_{k+1}$), так що

$$\sum_{k=1}^n \bar{R}_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n \bar{m}_o(\bar{R}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n \bar{m}_z(\bar{R}_k) = 0, \quad (6)$$

тобто геометрична сума внутрішніх сил або головний вектор внутрішніх сил дорівнює нулю, та геометрична сума моментів внутрішніх сил відносно будь-якого центра або головний момент внутрішніх сил і алгебраїчна сума моментів сил відносно осі дорівнюють нулю.

Центр мас матеріальної системи характеризує розподіл мас за об'ємом та є геометричною точкою, радіус-вектор якої обчислюється за виразом:

$$\bar{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k, \quad (7)$$

де $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{k=1}^n m_k$ – маса матеріальної системи; \bar{r}_k – радіус-вектор положення кожної k -тої точки системи відносно фіксованої у просторі точки O .

Центр мас матеріальної системи у проекціях на осі координат x, y, z визначається як

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{M}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{M}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{M}, \quad (8)$$

де x_k, y_k, z_k – координати окремих точок матеріальної системи.

У однорідному силовому полі Землі центр мас матеріальної системи збігається з його центром ваги.

Моменти інерції маси тіла характеризують розподіл мас за об'ємом та розрізняються на осьові, полярні, відцентрові моменти інерції з одиницею виміру $\text{кг} \cdot \text{м}^2$:

– *осьовий момент інерції маси тіла* (системи матеріальних точок) характеризує міру інертності тіла при обертальному русі відносно координатної осі – є завжди додатною величиною, яка дорівнює сумі добутків мас окремих точок на квадрати їх відстаней до цієї осі ($k = 1, \dots, n$):

$$I_x = \sum m_k r_{kx}^2 = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2), \quad I_y = \sum m_k r_{ky}^2 = \sum m_k (z_k^2 + x_k^2), \\ I_z = \sum m_k r_{kz}^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2).$$

Якщо тіло суцільне або має неперервний розподіл маси, то момент інерції твердого тіла визначається інтегралом, поширеним на всю масу:

$$I_x = \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \int_{(M)} (z^2 + x^2) dm, \quad I_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm;$$

– *полярний момент інерції маси тіла* (системи матеріальних точок) – I_o є сума добутків мас точок тіла m_k на квадрати їх відстаней $r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2$, ($k = 1, \dots, n$) до полюса O :

$$I_o = \sum m_k r_k^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2), \quad I_x + I_y + I_z = 2I_o;$$

– *відцентровий момент інерції маси тіла* (системи матеріальних точок) характеризує асиметричність розподілу мас при обертальному русі ($k = 1, \dots, n$):

$$I_{xy} = \sum m_k x_k y_k; \quad I_{xz} = \sum m_k x_k z_k; \quad I_{yz} = \sum m_k y_k z_k.$$

Для суцільного з неперервним розподілом маси тіла операції суми замінюються інтегралом:

$$I_{xy} = \int_M xy dm, \quad I_{xz} = \int_M xz dm, \quad I_{yz} = \int_M yz dm.$$

Відцентрові моменти інерції можуть дорівнювати нулю і мати додатний або від’ємний знак.

Головною віссю інерції тіла називається вісь Oz , для якої відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю ($I_{xz} = 0, I_{yz} = 0$). Вісь симетрії тіла є головною віссю інерції. Якщо всі три відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю: $I_{xy} = 0; I_{xz} = 0; I_{yz} = 0$, то кожна з координатних осей є головною віссю інерції даного тіла для точки O початку координат. Моменти інерції тіла відносно головних осей інерції є *головними моментами інерції*.

Центральною називається довільна вісь, яка проходить через центр мас тіла. Головна вісь інерції, яка проходить через центр мас, є *головною центральною віссю інерції*. Моменти інерції маси тіла відносно цих осей називаються *головними центральними моментами інерції тіла*.

Радіус інерції ρ_z тіла – це лінійна величина, добуток квадрата якої на масу тіла – M визначає осьовий момент інерції маси тіла, наприклад, відносно координатної осі z : $I_z = M \cdot \rho_z^2$.

Теорема Гюйгенса про моменти інерції маси тіла: момент інерції маси тіла відносно осі z дорівнює сумі моменту інерції маси тіла відносно паралельної осі z_c , яка проходить через центр мас C , і добутку маси тіла M на квадрат відстані між осями a :

$$I_z = I_{z_c} + M \cdot a^2.$$

Приклади обчислення моментів інерції тіл простої форми

Види тіл	Осьові моменти інерції
Однорідний тонкий стрижень довжиною l , масою M обертається навколо центральної осі zc або осі z , яка проходить через його кінець	$I_z = \frac{M l^2}{3}; \quad I_{zc} = \frac{M l^2}{12}$
Однорідне тонке кільце радіуса R або тонка циліндрична труба, маховик обертаються навколо центральної осі z , перпендикулярній площині кільця	$I_z = MR^2; \quad I_x = I_y = \frac{MR^2}{2}$
Кругла однорідна пластина або однорідний циліндр радіуса R обертається навколо центральної осі z	$I_z = \frac{MR^2}{2}; \quad I_x = I_y = \frac{MR^2}{4}$
Прямий коловий однорідний конус масою M і радіусом основи R обертається навколо центральної осі z , яка проходить крізь вершину і центр кола основи	$I_z = 0,3MR^2$
Однорідна куля радіуса R обертається навколо центральних осей x, y, z	$I_z = I_x = I_y = 0,4MR^2$

Міри механічного руху і міри дії сил

Кількість руху матеріальної точки і матеріальної системи – це векторні характеристики динамічного руху, які визначаються таким чином.

Кількість руху матеріальної точки дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості: $\vec{q} = m\vec{v}$, кгм/с, його напрямок збігається з напрямком вектора швидкості \vec{v} .

Кількість руху матеріальної системи дорівнює геометричній сумі векторів кількостей руху окремих точок системи, кгм/с:

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^n \bar{q}_k = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k.$$

Вектор кількості руху матеріальної системи або головний вектор кількості руху системи дорівнює добутку маси усієї системи на вектор швидкості її центра мас:

$$M \bar{v}_c = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k = \bar{Q}, \quad Q_x = M v_{cx}, \quad Q_y = M v_{cy}, \quad Q_z = M v_{cz},$$

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}, \quad \cos\left(\hat{\bar{Q}}, x\right) = \frac{Q_x}{Q}; \quad \cos\left(\hat{\bar{Q}}, y\right) = \frac{Q_y}{Q}; \quad \cos\left(\hat{\bar{Q}}, z\right) = \frac{Q_z}{Q}.$$

Теорема про зміну кількості руху матеріальної системи у диференціальній формі: похідна за часом від вектора кількості руху матеріальної системи дорівнює геометричній сумі всіх зовнішніх сил, які діють на матеріальну систему: $\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e$.

Закон збереження кількості руху матеріальної системи: якщо геометрична сума всіх зовнішніх сил, які діють на матеріальну систему, дорівнює нулю, то головний вектор кількості руху системи залишається незмінним: $\bar{Q} = \text{const}$.

Теорема про рух центра мас: центр мас системи матеріальних точок рухається як вільна матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору зовнішніх сил $M \bar{a}_c = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e$.

Моментом кількості руху ($m\bar{v}$) матеріальної точки відносно центра O названо вектор \bar{l}_{ok} , який дорівнює добутку $\bar{l}_{ok} = \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k$ і спрямований у той бік, звідки здається, що вектор ($m\bar{v}$) намагається повернути цю площину відносно центра O проти ходу годинникової стрілки (правило свердлика).

Головним, або кінетичним моментом матеріальної системи відносно будь-якого центра є вектор \bar{L}_o , який дорівнює геометричній сумі векторів \bar{l}_{ok} моментів кількості руху усіх точок системи відносно цього центра:

$$\bar{L}_o = \sum \bar{l}_{ok} = \sum \bar{m}_o (m_k \bar{v}_k) = \sum (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k).$$

Кінетичним або головним моментом кількості руху механічної системи відносно будь-якої осі z є алгебраїчна сума моментів l_{zk} кількості руху усіх точок системи відносно осі z :

$$L_z = \sum l_{zk} = \sum m_z (m_k \bar{v}_k).$$

Кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання z дорівнює добутку осьового моменту інерції маси тіла відносно осі на кутову швидкість тіла: $L_z = I_z \cdot \omega$.

Теорема про зміну кінетичного моменту матеріальної системи: похідна за часом від кінетичного моменту \bar{L}_o матеріальної системи відносно будь-якого центра O дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил відносно того ж центра. $\frac{d\bar{L}_o}{dt} = \sum \bar{m}_o (\bar{F}_k^e)$; проєктуючи останній вираз на осі координат, отримаємо:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_z (\bar{F}_k^e); \quad \frac{dL_x}{dt} = \sum m_x (\bar{F}_k^e); \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum m_y (\bar{F}_k^e).$$

Похідна за часом від кінетичного моменту матеріальної системи відносно нерухомої осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх зовнішніх сил, що діють на систему, відносно цієї осі.

Закон збереження кінетичного моменту матеріальної системи: якщо головний момент зовнішніх сил, які діють на систему, відносно будь-якого центра O дорівнює нулю – $\sum \bar{m}_o (\bar{F}_k^e) = 0$, то кінетичний момент матеріальної системи відносно цього центра зберігає своє значення: $\bar{L}_o = \sum \bar{m}_o (m_k \bar{v}_k) = \text{const}$.

Кінетичною енергією називають фізичну величину, яка є скалярною мірою механічного руху в нерухомій системі координат при переході однієї форми руху в іншу, наприклад, механічної в теплову тощо. Повна механічна енергія E дорівнює сумі кінетичної T і потенціальної Π енергій: $E = T + \Pi$.

Кінетичною енергією точки називають скалярну величину, яка дорівнює половині добутку маси точки на квадрат швидкості, Нм (Дж),

$$T = \frac{mv^2}{2}, \quad \text{та є величиною додатною.}$$

Кінетична енергія матеріальної системи – це скалярна величина, яка дорівнює арифметичній сумі кінетичних енергій окремих точок,

що складають систему:
$$T = \sum T_k = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}.$$

Кінетична енергія тіла, яке рухається поступально, дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат швидкості довільної точки або

центра мас: $T = \frac{M \bar{v}^2}{2}$, де \bar{v} – швидкості усіх точок, які при поступальному русі однакові.

Кінетична енергія тіла, яке обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω , дорівнює половині добутку моменту інерції маси тіла відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості:

$T = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2}$, де $I_z = \sum m_k r_k^2$ – осьовий момент інерції маси тіла, міра інертності тіла при обертальному русі.

Кінетична енергія тіла, яке рухається плоскопаралельно, дорівнює сумі енергій поступального руху зі швидкістю центра мас і оберта-

льного руху навколо центра мас: $T = \frac{M v_c^2}{2} + \frac{I_{zc} \omega^2}{2}.$

Зміна кінетичної енергії точки на деякому її переміщенні дорівнює роботі рівнодійної сили на цьому переміщенні.

Зміна кінетичної енергії матеріальної системи на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт на цьому переміщенні зовнішніх і внутрішніх сил: $T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^{in}$, де $\sum A_k^e$ – сума робіт зовнішніх сил, що діють на систему; $\sum A_k^{in}$ – сума робіт внутрішніх сил, які діють між точками системи.

Зміна кінетичної енергії матеріальної системи для незмінних механічних систем (деформації яких можна не враховувати, $\sum A_k^{in} = 0$) дорівнює алгебраїчній сумі робіт зовнішніх сил на цьому переміщенні: $T - T_0 = \sum A_k^e.$

Стаціонарне силове поле називають потенціальним, якщо робота сил поля, які діють на матеріальну точку, що рухається, не залежить від форми її траєкторії, а є однозначною функцією координат початкового і кінцевого положень точки.

Потенціальною енергією матеріальної точки у даному положенні M називають скалярну величину Π , яка дорівнює тій роботі, яку виконують сили поля при переміщенні точки із положення M у нульове положення.

Зовнішні сили називають потенціальними, якщо проекції сил, що діють на точки консервативної системи – F_{xv} , F_{yv} , F_{zv} на координатні осі, обчислюються за співвідношеннями:

$$F_{xv} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_v}, \quad F_{yv} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_v}, \quad F_{zv} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_v}, \quad v = \overline{1, N},$$

де $\Pi = \Pi(x_v, y_v, z_v)$ – потенціальна енергія системи.

Робота сил тяжіння на переміщенні точки з положення M_1 у положення M_2 , якщо $z_1 - z_2 = h$, дорівнює: $A = mgh$.

Робота сили пружності, якщо вона відповідає закону Гука ($F_{пр} = cx$), дорівнює половині добутку коефіцієнта пружності на квадрат переміщення її точки прикладання, яке відлічується від положення недеформованого стану: $A = \frac{c}{2}(x_{поч}^2 - x_{кін}^2)$. Робота сили пружності від'ємна тому, що вектор сили пружності завжди спрямований протилежно переміщенню її точки прикладання

Робота сил тертя $P_{тр}$ на переміщенні її точки прикладання – s , з положення M_1 в положення M_2 , дорівнює: $A = -P_{тр} \cdot s$, та завжди від'ємна тому, що вектор сили тертя спрямований протилежно переміщенню її точки прикладання.

Робота моменту пари сил – $M_z(\vec{P})$, під дією якого тіло обернеться навколо нерухомої осі z на кут, рівний Φ , дорівнює: $A = \pm M_z(\vec{P}) \cdot \Phi.$

Потенціальна енергія механічної системи, яка перебуває під дією сил тяжіння, дорівнює добутку ваги системи на висоту її центра ваги над нульовою еквіпотенціальною поверхнею: $\Pi = G \cdot z_c.$

Закон збереження механічної енергії стверджує, що під час руху механічної системи під дією потенціальних сил сума кінетичної і потенціальної енергій системи у кожному її положенні залишається величиною незмінною: $T_1 + \Pi_1 = T_0 + \Pi_0 = \text{const}.$

Динаміка твердого тіла

Диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла є диференціальними рівняннями руху центра мас тіла поступального руху твердого тіла: $M\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^e$, $M\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^e$, $M\ddot{z}_c = \sum F_{kz}^e$, де M – маса тіла; x_c, y_c, z_c – координати центра мас; $F_{kx}^e, F_{ky}^e, F_{kz}^e$ – проекції зовнішньої k -тої сили на осі координат.

Диференціальні рівняння обертального руху твердого тіла, що під дією прикладених до нього сил $\bar{P}_1^e, \bar{P}_2^e, \dots, \bar{P}_n^e$ обертається навколо нерухомої осі z з кутовою швидкістю ω мають таку форму:

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum m_z(\bar{P}_k^e), \text{ або } I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z(\bar{P}_k^e), \text{ чи } I_z \varepsilon = \sum m_z(\bar{P}_k^e).$$

Обертальний рух прискорений ($\varepsilon = \ddot{\varphi} > 0$), якщо $\sum m_z(\bar{P}_k^e) > 0$, сповільнений ($\varepsilon = \ddot{\varphi} < 0$), якщо $\sum m_z(\bar{P}_k^e) < 0$, якщо $\sum m_z(\bar{P}_k^e) = 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} = 0$ – обертання рівномірне ($\omega = \text{const}$).

Диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла у координатній формі, якщо обрати за полюс центр мас тіла точку C , набувають вигляду:

$$M\ddot{x}_c = \sum P_{kx}, \quad M\ddot{y}_c = \sum P_{ky}, \quad I_{zc}\ddot{\varphi} = \sum m_z(\bar{P}_k^e).$$

Аналітична динаміка

Невільна механічна (матеріальна) система є системою точок (тіл), на які накладені в'язі, що обмежують положення або швидкості руху точок (тіл) системи.

В'язі називаються голономними або неголономними, якщо записуються аналітичними функціями від координат або неінтегрованими функціями координат і швидкостей; якщо ці записи мають вид рівностей або нерівностей, в'язі поділяються на утримуючі та неутримуючі. Нестационарними є в'язі, аналітичні функції яких явно залежать від часу, а якщо навпаки – стаціонарними.

Механічну систему з голономними й стаціонарними в'язями, що рухається під дією лише потенціальних сил, називають консерватив-

ною. У цьому разі повна енергія консервативної системи не змінюється, тобто зберігається при її русі: $\frac{dE}{dt} = 0$; $T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = \text{const}$.

Узагальненими координатами називаються незалежні між собою параметри q_1, q_2, \dots, q_H будь-якої розмірності, кількість яких дорівнює кількості ступенів вільності системи і які однозначно визначають положення та швидкість окремих точок цієї системи: $\bar{r}_k = \bar{r}(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$. Величини $\dot{q}_i (i = \overline{1, s})$ називаються узагальненими швидкостями, а $\ddot{q}_i (i = \overline{1, s})$ – узагальненими пришвидженнями.

Кінетична енергія матеріальної системи є функцією узагальнених координат, узагальнених швидкостей і часу: $T = T(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$. Кінетичну енергію консервативної системи можна подати у вигляді однорідної функції 2-го ступеня (квадратична форма) від узагальнених швидкостей: $T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$.

Узагальнені сили, відповідні узагальненим координатам q_i , визначаються рівностями: $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = \sum_{v=1}^N \left(F_{xv} \frac{\partial x_v}{\partial q_i} + F_{yv} \frac{\partial y_v}{\partial q_i} + F_{zv} \frac{\partial z_v}{\partial q_i} \right)$, та для потенціальних сил ці рівності можна записати так: $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$.

Умови рівноваги матеріальної системи з ідеальними в'язями при дії потенціальних сил мають вигляд: $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad i = \overline{1, s}$.

Елементарна робота потенціальних сил на узагальнених переміщеннях знаходиться так: $\delta A = \sum_{i=1}^s Q_i \delta q_i, \quad \delta A = -\delta \Pi$.

Узагальненими дисипативними силами називають сили розсіювання (сили в'язкого опору), що мають потенціал розсіювання – $\tilde{Q}_i = -\frac{\partial \hat{O}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = \overline{1, s}$.

Потенціал сил розсіювання (функція Релея) –

$$\dot{O} = -\frac{1}{2} \sum \beta_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad i, j = \overline{1, s}, \quad \text{де } \beta_{ij} = \beta_{ji} - \text{коефіцієнти в'язкого опору є}$$
від'ємною функцією, що дорівнює потужності узагальнених дисипативних сил на узагальнених швидкостях $\dot{O} = -\sum \tilde{Q}_i \dot{q}_i \leq 0$, тому що сили в'язкого опору (тертя) спрямовані протилежно швидкості переміщення її точки прикладання.

Непотенціальні сили, що діють на механічні (матеріальні) системи є функціями часу, узагальнених переміщень і швидкостей: $\tilde{Q}_i = \tilde{Q}_i(t, q_j, \dot{q}_j)$.

Повна енергія системи при дії потенціальних сил є рівною сумі кінетичної і потенціальної енергій: $E = T + \Pi$.

Кінетичним потенціалом чи функцією Лагранжа називають додаток кінетичної та потенціальної енергій: $L = T - \Pi$.

Потужність втрат механічної енергії за рахунок сил в'язкого опору (тертя) обчислюється так: $W = -\sum_{i=1}^N \mu_i v_i^2$, де μ_i – коефіцієнти в'язкого опору (тертя), v_i – швидкості руху точок.

Рівняннями Лагранжа другого роду називаються диференціальні рівняння руху механічної системи, а невідомими є лише параметри $q_i(t)$, що визначають закон руху системи:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} + Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

де q_i і \dot{q}_i – узагальнена координата та швидкість; T і Π – кінетична і потенціальна енергії системи відповідно; Φ – функція розсіювання, Q_i – узагальнена непотенціальна сила.

Кількість рівнянь Лагранжа другого роду дорівнює кількості ступенів вільності матеріальної системи.

Методика розв'язання задач за допомогою рівнянь Лагранжа 2-го роду полягає у наступному: для заданої матеріальної системи з голономними стаціонарними в'язями визначають кількість ступенів вільності і обирають відповідну систему узагальнених координат та узагальнені сили, які відповідають узагальненим координатам; визначають

кінетичну енергію системи як функцію узагальнених координат і узагальнених швидкостей; далі складають рівняння Лагранжа другого роду для кожної узагальненої координати та після їхнього інтегрування з урахуванням початкових умов отримують закон руху системи.

Питання для самоконтролю

1. Що вивчає динаміка і які у неї є основні задачі?
2. Сформулюйте основні закони динаміки?
3. Як записуються диференціальні рівняння руху точки в координатній і натуральній формах?
4. Як записуються диференціальні рівняння руху невільної точки?
5. Як формулюється і розв'язується перша задача динаміки?
6. Як формулюється і розв'язується друга задача динаміки?
7. Що таке початкові умови руху точки?
8. Як визначаються сталі інтегрування диференціальних рівнянь?
9. Які моменти інерції маси тіла вам відомі?
10. В яких одиницях вимірюється момент інерції маси тіла і що він характеризує?
11. Що таке радіус інерції тіла?
12. Як формулюється теорема Гюйгенса про моменти інерції?
13. Як обчислити моменти інерції стрижня, суцільного і трубчастого циліндра, кулі, конуса?
14. Що таке відцентрові моменти інерції тіла і як вони характеризують розподіл маси тіла?
15. Які осі в тілі є головними центральними осями?
16. Що таке кількість руху матеріальної точки і системи, яка її розмірність?
17. Які міри руху існують у тілі, що рухається?
18. Як визначається імпульс змінної і сталої сили?
19. Як формулюється теорема про зміну кількості руху матеріальної точки і системи?
20. Як записується теорема про зміну кількості руху точки в диференціальній формі?
21. Як формулюється закон збереження кількості руху матеріальної системи?

льної системи?

22. Які задачі розв'язуються за допомогою загальних теорем динаміки?

23. Які міри дії сил мають місце під час руху тіла?

24. Як визначаються поняття моменту кількості руху матеріальної точки і системи?

25. Як формулюється теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки?

26. Як формулюється теорема про зміну кінетичного моменту матеріальної системи?

27. Як визначити кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання?

28. Як формулюється закон збереження кінетичного моменту матеріальної точки?

29. Як формулюється закон збереження кінетичного моменту матеріальної системи?

30. Які приклади із побуту свідчать про спрацювання закону збереження кінетичного моменту системи?

31. Як формулюється закон збереження кінетичного моменту матеріальної системи відносно осей координат?

32. Як визначити головний момент кількості руху матеріальної системи?

33. Чому динаміка поступального руху тіла може бути зведена до динаміки точки?

34. Чому дорівнює кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання?

35. Як записується і формулюється словами вираз диференціального рівняння обертального руху тіла відносно осі?

36. В яких випадках дії сил обертальний рух тіла буде рівномірним, прискореним чи сповільненим?

37. Скільки диференціальних рівнянь визначають динаміку плоского руху твердого тіла і який вигляд ці рівняння мають?

38. Як записується вираз кінетичної енергії точки і системи?

39. Як обчислюється кінетична енергія тіл, що рухаються поступально, плоскопаралельно, і обертаються?

40. Як записується і формулюється словами теорема про зміну кінетичної енергії у диференціальній і кінцевій формах?

47. Який вигляд має загальне рівняння динаміки?

48. Який вигляд мають рівняння Лагранжа другого роду? Чому дорівнює кількість цих рівнянь для кожної матеріальної системи?

49. Що являє собою функція Лагранжа або кінетичний потенціал?

50. Який вигляд мають рівняння Лагранжа другого роду для консервативної системи?

51. Залежно від яких змінних величин має бути виражена кінетична енергія матеріальної системи при складанні рівнянь Лагранжа другого роду?

4.2. Лабораторні заняття

Розв'язання першої задачі динаміки точки

Завдання 1. Визначте рівнодійну силу, під дією якої матеріальна точка рухається за законом: $x = at$, $y = bt - ct^2$, де a , b , $c = \text{const}$.

Завдання 2. Вантаж A масою 600 кг за допомогою тросу, що намотується на барабан ворота радіусом $r = 20 \text{ см}$, піднімається з ковзанням по шорсткій поверхні, яку нахилено до горизонту під кутом 60° . Визначте силу натягу тросу, як функцію часу – $T = T(t)$, та обчисліть її значення через $t = 2 \text{ с}$ після підйому вантажу. Прийняти, що закон обертання барабана ворота, вісь якого закріплено в центрі B , задано функцією часу для кута обертання $\varphi = 0,4t^3$ рад, та коефіцієнт тертя між вантажем і поверхнею дорівнює $f = 0,2$.

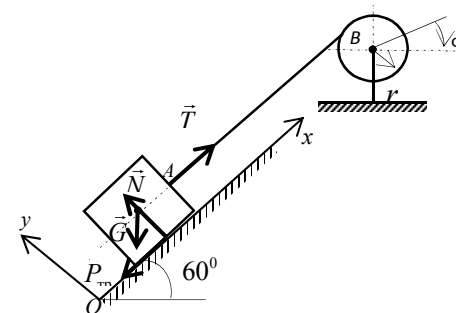


Рисунок 4.1 – Розрахункова схема до завдання 2

Розв'язання другої задачі динаміки точки

Завдання 3. Тіло вагою G під дією сили $Q=0,5G$ піднімається по нахилений до горизонту під кутом $\alpha = 30^\circ$ шорсткій поверхні. Визначить шлях S , який під дією сил пройде тіло з положення покою від точки A за $t = 5$ с. Початкова швидкість тіла дорівнює $v_0 = 10$ м/с, коефіцієнт тертя між тілом і поверхнею $f = 0,1$.

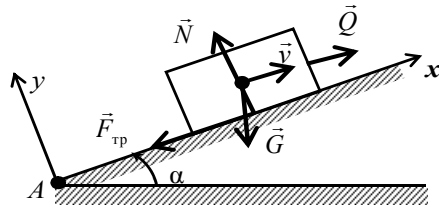


Рисунок 4.2 – Розрахункова схема до завдання 3

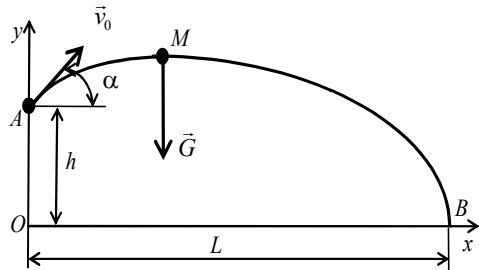


Рисунок 4.3 – Розрахункова схема до завдання 4

$x = x(t)$, $y = y(t)$; рівняння траєкторії $y = y(x)$; час t_1 , дальність L і максимальну висоту H польоту. При обчисленнях прийміть, що $h = 10$ м, $v_0 = 600$ м/с, $\alpha = 30^\circ$.

Завдання 4. Для матеріальної точки (наприклад, снаряд), що з початковою швидкістю v_0 вилітає з висоти h під кутом α до горизонту і на яку в польоті діє тільки сила ваги $\vec{G} = m\vec{g}$, визначте координатний закон руху

Визначення динамічних характеристик механічних систем

Завдання 5. Вал електродвигуна 1 обертається з постійною кутовою швидкістю ω та в перпендикулярній до осі вала площині приводить до обертального руху, за законом $\varphi = \omega t$, невагомий стрижень

довжиною $C_1C_2 = l$ з прикріпленням на другому його кінці C_2 вантажем 2 , вагою G_2 . Електродвигун, що важить G_1 , з'єднано болтами з ідеально гладкою площиною поверхні нерухомого фундаменту. Визначте найбільші значення вертикальної та горизонтальної проекцій динамічної реакції електродвигуна, що діють на фундамент та на болти, відповідно у напрямку горизонталі до площини поверхні нерухомого фундаменту. Складіть диференціальне рівняння руху електродвигуна в горизонтальній площині фундаменту за відсутності болтового закріплення і за умов спокою електродвигуна до початку руху.

Примітка: для розв'язування завдань скористайтесь теоремою про зміну кількості руху і про рух центра мас матеріальної системи.

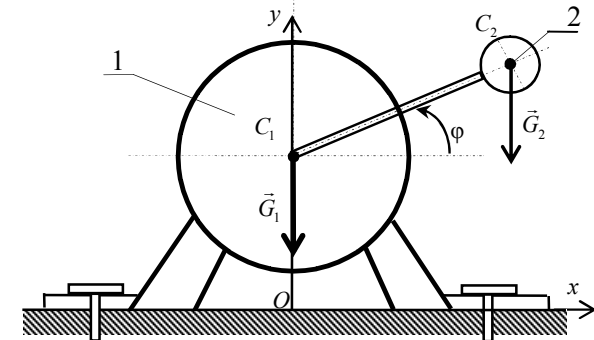


Рисунок 4.4 – Розрахункова схема до завдання 5

Завдання 6. Вантаж 1 масою $m_1 = 100$ кг, вагою G_1 , спускається на тросі, що навитий на другий ступінь двоступеневого барабана 2 , радіусами $R = 0,2$ м і $r = 0,1$ м, масою m_2 та осьовим моментом інерції мас $I_2 = 2$ кг м². Вантаж 3 масою $m_3 = 900$ кг, вагою G_3 , піднімається по нахилений до горизонту під кутом $\alpha = 45^\circ$ шорсткій поверхні, з коефіцієнтом тертя $f = 0,2$ між тілом і поверхнею, за допомогою троса, що навитий на другий ступінь барабана 2 . Двоступеневий барабан 2 під дією незмінних у часі привідного моменту $M_{\text{вр}} = 800$ Нм та моменту опору в підшипнику $M_c = 110$ Нм обертається з постійною кутовою швидкістю.

Визначте кутову швидкість двоступеневого барабана 2, пришвидшення вантажів 1 і 2, а також значення реакцій тросів в місцях кріплення вантажу.

Примітка: для розв'язання завдань скористайтесь теоремою про зміну кінетичної енергії матеріальної системи.

Завдання 7. Вертикальний вал вагою P , який закріплено в підп'ятнику A та в підшипнику B , має два шарнірно причеплені жорсткі невагомні стрижні рівної довжини l , які симетрично розташовані у вертикальній площині під кутом α до осі вала, та на кінці кожного з них розташовано вантаж однакової маси m .

Установіть залежності кутової швидкості вала ω і реакцій в опорах вала від кута положення стрижнів α при обертанні вала. Прийняти, що осьовий момент інерції маси вала дорівнює I .

Примітка: для розв'язання завдань скористайтесь теоремою про зміну кінетичного моменту матеріальної системи.

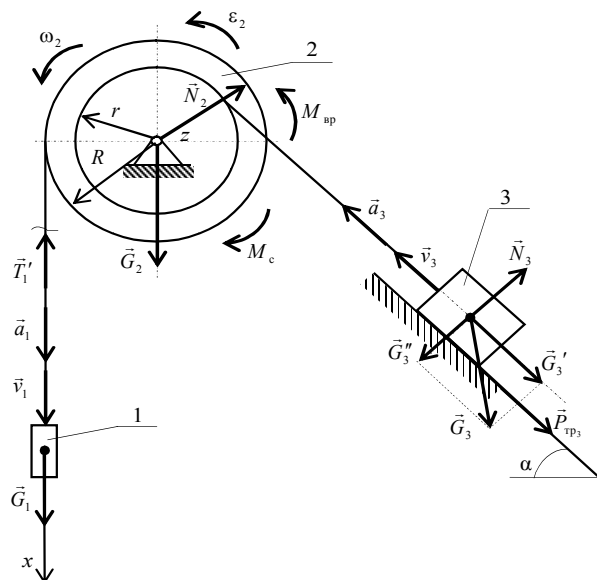


Рисунок 4.5 – Розрахункова схема до завдання 6

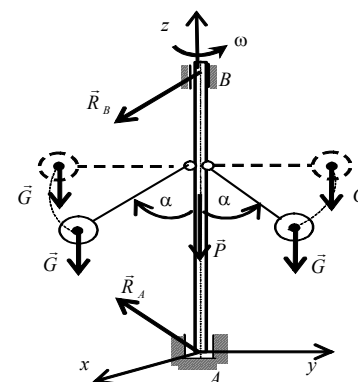


Рисунок 4.6 – Розрахункова схема до завдання 7

Визначення кінематичних характеристик руху механічних систем

Завдання 8. Механічна система зі стану спокою починає рухатися під дією сил тяжіння вантажу 1 вагою G_1 , та барабана 3 вагою G_3 , які відповідно зв'язані тросами з зовнішнім та внутрішнім ободами двоступеневого барабана масою $m_2 = m$, із радіусом інерції $\rho_2 = 0,8R_2$,

радіусами $R_2 = 20$ см і $r_2 = 0,75R_2$.

Поступальний рух тіла 1 з масою $m_1 = 4m$ здійснюється вздовж нахиленої під кутом $\alpha = 60^\circ$ до горизонту шорсткої поверхні з коефіцієнтом тертя $f = 0,2$ між тілом і поверхнею. Плоско-паралельний рух барабана 3 з масою $m_3 = 4m$ і радіусом $R_3 = 20$ см здійснюється за рахунок кочення без ковзання вздовж нерухомої гладкої поверхні, яку

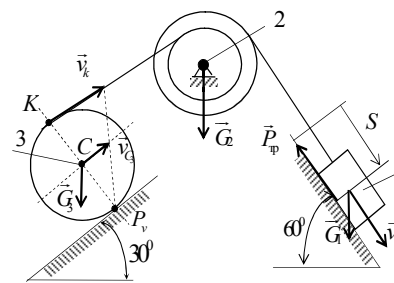


Рисунок 4.7 – Розрахункова схема до завдання 8

нахилено під кутом $\beta = 30^\circ$ до горизонту. Визначте швидкість тіла 1 в момент часу, коли шлях, що пройде тіло, дорівнюватиме $S = 1,2$ м.

Примітка: для розв'язання завдань скористайтесь теоремою про зміну кінетичної енергії матеріальної системи.

Завдання 9. Механічна система зі стану спокою починає рухатись під дією сил тяжіння вантажу 1 масою $m_1 = 10m$, вагою G_1 і циліндрич-

ного котка 2 масою $m_2 = m$, вагою G_2 , які зв'язані між собою нерозтяжним тросом й рухаються разом по нахилений під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту шорсткій поверхні з коефіцієнтами тертя ковзання $f_1 = 0,3$ та тертя кочення $\delta = 0,002$ м. На коток 2 намотано нерозтяжний трос, один кінець якого намотано на зовнішній обід двоступеневого барабана 3 масою $m_3 = 5m$, вагою G_3 , з радіусом інерції $\rho_3 = 0,3$ м, радіусами $R_3 = 0,4$ м і $r_3 = 0,2$ м. На внутрішній ступінь барабана 3 намотано нерозтяжний трос. Кінець троса намотано на внутрішній ступінь двоступеневого блока 4 масою $m_4 = 2m$, вагою G_4 , з радіусом інерції $\rho_4 = 0,2$ м, радіусами $R_4 = 0,3$ м і $r_4 = 0,15$ м. На зовнішній ступінь барабана 4 намотано нерозтяжний трос, другий кінець якого вивішено вертикально і закріплено в нерухомій жорсткій опорі A так, що зовнішній обід блока 4, котячись по тросу, спускається вертикально до низу. Визначте швидкість v_1 вантажу 1 коли його шлях по поверхні буде дорівнювати $S_1 = 2$ м.

Примітка: для розв'язання завдань скористайтесь теоремою про зміну кінетичної енергії матеріальної системи.

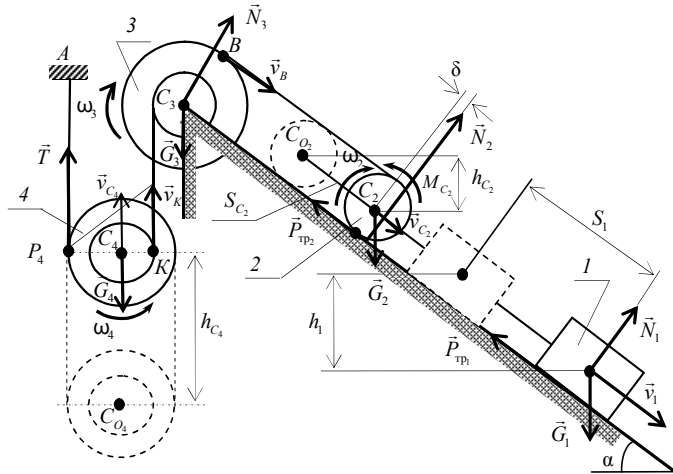


Рисунок 4.8 – Розрахункова схема до завдання 9

Завдання 10. Визначте пришвидшення вантажу 1 вагою $P_1 = 400$ Н, опускаючись униз по похилій площині, що утворює з горизонтом кут $\alpha = 45^\circ$, надає рух котку 3 вагою $P_3 = 200$ Н за допомогою

невагомого нерозтяжного троса, перекинутого через нерухомий блок 2 вагою $P_2 = 200$ Н.

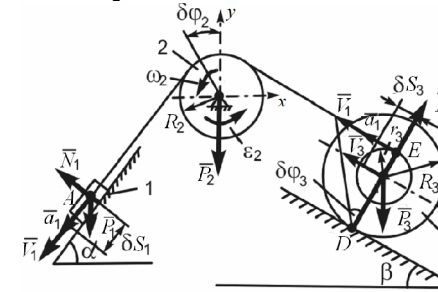


Рисунок 4.9 – Розрахункова схема до завдання 10

Радіуси котка 3 дорівнюють: $r_3 = 0,2$ м, $R_3 = 0,6$ м. Коток 3 котиться без ковзання по площині, що утворює з горизонтом кут $\beta = 30^\circ$. Радіус інерції котка 3 відносно осі O дорівнює $\rho_{O1} = 0,4$ м. Блок 2 вважається однорідним диском.

Ковзання троса вздовж блока 2 відсутнє.

Примітка: для розв'язання завдань скористайтесь рівняннями Лагранжа другого роду.

Завдання 11. Визначте пришвидшення вантажу 1 вагою $G_1 = 3G$ і силу натягу троса, що з'єднає цей вантаж з першим ступенем двоступеневого шківу 2, радіусами $R_2 = 0,4$ м і $r_2 = 0,3$ м та вагою $G_2 = 2G$. Вантаж 1 піднімається вздовж нахилений під кутом $\alpha = 60^\circ$ до горизонту шорсткій поверхні з коефіцієнтом тертя $f = 0,1$ між тілом і поверхнею. Вантаж 4 вагою $G_4 = G$ піднімається за допомогою троса, що перекинутий через перший ступінь двоступеневого шківа 3 радіусами $R_3 = 0,2$ м і $r_3 = 0,1$ м та вагою $G_3 = 2G$.

Осі шківів є нерухомими, а шківи 2 і 3 зв'язані без ковзання ремінним пасом, та обертаються під дією прикладених до них відповідного моменту $M_2 = 2G$ Нм та моменту опору $M_3 = G$ Нм, відповідно.

Примітка: для розв'язання завдань скористайтесь теоремою про зміну кінетичної енергії.

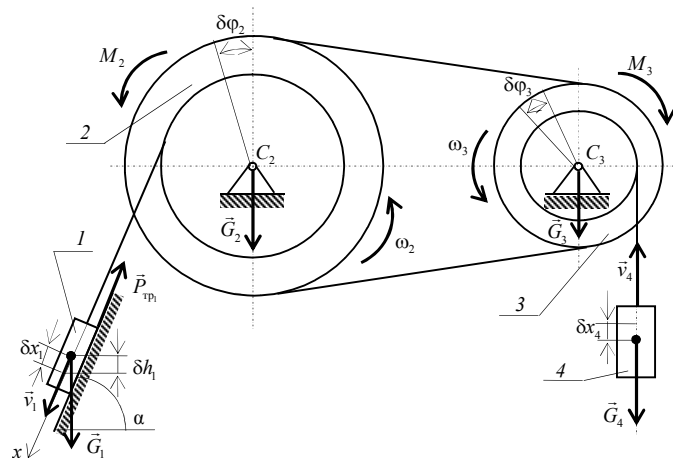


Рисунок 4.10– Розрахункова схема до завдання 11

4.3. Лабораторна робота 3. Визначення характеристик руху точок та тіл механічної системи

Мета роботи – вивчення закономірностей і властивостей руху механічних (матеріальних) систем на базі інваріантних форм моделювання динаміки механічних (матеріальних) систем.

Об’єкт досліджень – матеріальні точки або абсолютно тверді тіла і механічні (матеріальні) системи, які під дією прикладених до них сил переміщуються у просторі й часі з початкового положення рівноваги в інше.

Предмет досліджень – закони руху матеріальних точок та абсолютно твердих тіл і механічних (матеріальних) систем з урахуванням мас і під дією прикладених до них сил, закономірності зміни у часі *мір механічного руху і дії сил*: кількості руху, кінетичного моменту, кінетичної та повної енергії, роботи й потужності сил, а також *кінематичних характеристик руху*: швидкостей, пришвидшень й переміщення з початкового положення в інше, що визначаються шляхом розв’язання диференціальних рівнянь руху механічних систем, які в інваріантній формі є наслідком теоретичних положень і фундаментальних принципів аналітичної механіки.

Методи досліджень містять найбільш загальні аналітичні методи розв’язання задач механіки та комп’ютерні обчислювання.

Комп’ютерне моделювання динаміки електромеханічного приводу на базі рівнянь Лагранжа 2-го роду. Електромеханічний привід під дією змінного у часі моменту M , який передається від електродвигуна на шків 1, приводить тіло 3 з масою m_3 до поступального руху вздовж нахиленої під кутом α до горизонту шорсткої поверхні з коефіцієнтом тертя f .

Тіло 3 приводить до плоско-паралельного руху колесо 4 з масою m_4 , радіусом ободу R_4 і ступені r_4 , що котиться без ковзання вздовж нерухомої гладкої поверхні, яку нахилено під кутом β до горизонту. Для забезпечення переміщень тіла і колеса у приводі застосовано пасову передачу зі шківом 1, масою m_1 і радіусом R_1 та двоступеневою шківу 2, радіусами R_2 та r_2 із загальною масою m_2 і радіусом інерції ρ , вісі яких є нерухомими. Пасова передача приводить до обертання двоступеневий шків 2 з намотаним на його першу ступень та колесо тросом, що дозволяє здійснювати рух колеса 4, та шків 1, що жорстко зчеплений з валом електродвигуна, та на який намотано трос, на кінці якого прикріплено тіло 3. На підставі розв’язання диференціальних рівнянь Лагранжа 2-го роду визначте *закони руху тіл* електромеханічного приводу: швидкостей, пришвидшень й переміщення закономірності за час, коли при підйомі колесо 4 пройде шлях S_{4k} , а також зміни у часі *мір механічного руху і дії сил*: кінетичної та повної енергії, роботи й потужності сил. При обчисленнях прийміть, що на початку механічна система знаходилась в спокої, а рух тіл системи здійснюється під дією їхньої ваги і сили тертя, а також змінного у часі моменту $M = kt^n$, кНм, який передається від електродвигуна на шків 1. Інерційні дані тіл системи дорівнюють: $m_1 = 2$; $m_2 = 20$; $m_3 = 30$; $m_4 = 5$ (кг); геометричні параметри шківів та колеса: $R_1 = 0,15$; $R_2 = 0,3$; $r_2 = 0,2$; $\rho_{2z} = 0,25$; $R_4 = 0,3$, $r_4 = 0,15$; $\rho_{4z} = 0,25$ (м); кути нахилу поверхонь $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$ та коефіцієнт тертя між тілом 3 і поверхнею $f = 0,2$.

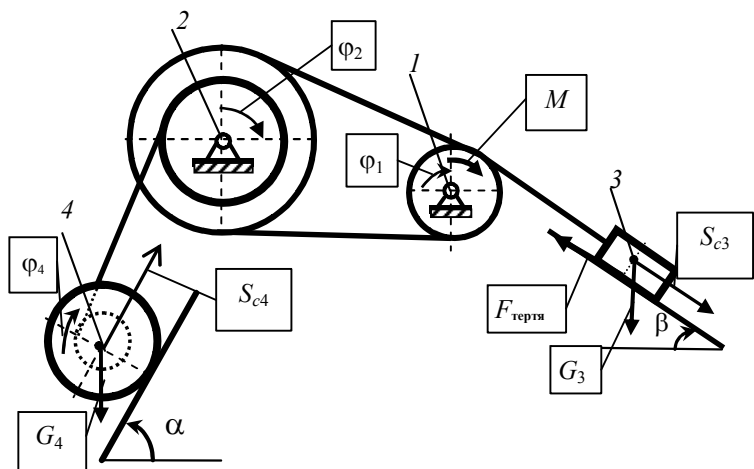


Рисунок 4.11 – Розрахункова модель електромеханічного приводу

Для розв'язання завдань на підставі диференціальних рівнянь руху тіл механічної системи спочатку із врахуванням в'язей для кожного з тіл $S_3 = \varphi_1 R_1$, $S_4 = \varphi_4 R_4$, $\varphi_4 = \varphi_2 r_2 / (2R_4)$, $\varphi_2 = \varphi_1 R_1 / R_2$ та діючих на ці тіла зовнішніх сил, складемо рівняння динаміки поступального руху тіла 3 під дією ваги та сил тертя, обертальних рухів шківу 1, під дією прикладеного до нього моменту, та шківу 2 і плоско-паралельного руху колеса 4 під дією ваги:

$m_3 \ddot{S}_3 = m_3 g \sin \beta - f m_3 g \cos \beta$; $m_4 \ddot{S}_4 = -m_4 g \sin \alpha$; $I_4 \ddot{\varphi}_4 = 0$; $I_1 \ddot{\varphi}_1 = M(t)$; $I_2 \ddot{\varphi}_2 = 0$, де $I_4 = m_4 \rho_{4z}^2$, $I_1 = m_1 R_1^2 / 2$, $I_2 = m_2 \rho_{2z}^2$ – моменти інерції мас тіл. Розв'язання цієї системи рівнянь зводиться до інтегрування з урахуванням умови, що на початку механічна система знаходилась в покої.

Для розв'язання завдань на базі рівнянь Лагранжа 2-го роду, спочатку, для заданої матеріальної системи визначають кількість ступенів вільності. З цієї метою, для заданої системи оберемо наступну систему узагальнених координат: S_{c3} – переміщення центру маси тіла 3 вздовж шорсткої поверхні; φ_1 , φ_2 – кути обертання шківів 1 та 2; S_{c4} , φ_4 – переміщення центру маси та кут обертання колеса 4.

Випишемо співвідношення між цими координатами, які є наслідком накладених на тіла механічної системи в'язей: $S_{c3} = \varphi_1 R_1$;

$\varphi_2 = \varphi_1 R_1 / R_2$; $\varphi_4 = \varphi_2 r_2 / (R_4 + r_4)$; $S_{c4} = \varphi_4 R_4$. Ці чотири геометричні рівняння мають одну невідому узагальнену координату, наприклад, якщо прийняти за незалежну координату $q = S_{c3}$, то усі інші узагальнені координати можна виразити через неї так: $\varphi_1 = q / R_1$; $\varphi_2 = q / R_2$; $\varphi_4 = q r_2 / ((R_4 + r_4) R_2)$; $S_{c4} = q r_2 R_4 / ((R_4 + r_4) R_2)$. Звідси встановлюють, що механічна система має голономні і стаціонарні в'язі та одну ступень вільності: $s = 1$.

Далі визначають кінетичну енергію системи як функцію узагальненої координати і узагальненої швидкості $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$,

$$\text{де } T_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2 R_1^2} J_1 \dot{q}^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{2 R_2^2} J_2 \dot{q}^2 -$$

кінетичні енергії обертального руху шківів 1 та 2; $T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = \frac{1}{2} m_3 \dot{q}^2$,

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 v_4^2 + \frac{1}{2} J_{c4} \omega_4^2 = \frac{1}{2} [(m_4 + J_{c4} / R_4^2) (r_2 R_4 / ((R_4 + r_4) R_2))^2] \dot{q}^2 -$$

кінетичні енергії поступального руху тіла 3 та плоско-паралельного руху колеса 4.

Остаточно кінетична енергія електроприводу визначиться так:

$$T = \frac{1}{2} M_q \dot{q}^2,$$

$$M_q = J_1 / R_1^2 + J_2 / R_2^2 + m_3 + (m_4 + J_{c4} / R_4^2) (r_2 R_4 / ((R_4 + r_4) R_2))^2.$$

Далі визначають узагальнені сили, які відповідають узагальненим координатам. Елементарна робота потенціальних сил на узагальнених переміщеннях знаходиться так:

$$\begin{aligned} \partial A &= M(t) \cdot \partial \varphi_1 + (m_3 g \sin \beta - f m_3 g \cos \beta) \cdot \partial S_{c3} - m_4 g \sin \alpha \cdot \partial S_{c4} \\ &= [M(t) / R_1 + m_3 g \sin \beta - f m_3 g \cos \beta - m_4 g \sin \alpha \cdot r_2 R_4 / ((R_4 + r_4) R_2)] \cdot \partial q. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо:

$$\partial A = Q \partial q, \quad Q = M(t) / R_1 + F,$$

$$F = m_3 g \sin \beta - f m_3 g \cos \beta - m_4 g \sin \alpha \cdot r_2 R_4 / ((R_4 + r_4) R_2);$$

Складемо рівняння Лагранжа другого роду для узагальненої координати $q = S_{c3}$: $M_q \ddot{q} = Q$, $q(0) = \dot{q}(0) = 0$.

Після його інтегрування та визначення сталих інтегрування за допомогою початкових умов отримуємо закон руху системи:

$$\dot{q} = (F / M_q)t + 1/(M_q R_1) \int M(t)dt ,$$

$$q = (F / (2M_q))t^2 + 1/(M_q R_1) \int [\int M(t)dt]dt .$$

У випадку $M(t) = k t^n$: $\int M(t)dt = k / (n+1) t^{n+1}$,

$$\int [\int M(t)dt]dt = k / (n+1) t^{n+2} / (n+2) .$$

При $k = 3$, $n = 2$ отримуємо: $q = (F / (2M_q))t^2 + 1/(4M_q R_1)t^4$,
 $\dot{q} = (F / (M_q))t + 1/(M_q R_1)t^3$, $\ddot{q} = F / (M_q) + 3/(M_q R_1)t^2$; *закони руху тіл*:
 $\varphi_1 = q / R_1$; $\varphi_2 = q / R_2$; $\varphi_4 = qr_2 / ((R_4 + r_4)R_2)$; $S_{c4} = qr_2 R_4 / ((R_4 + r_4)R_2)$;
міри механічного руху і дії сил: кінетична енергія $T = 1/2 M_q \dot{q}^2$, робота
та потужність сил $A = Qq$, $N = Q\dot{q}$; *кінематичні характеристики руху*
тіл: швидкості $v_{c3} = \dot{q}$, $\omega_1 = \dot{q} / R_1$, $\omega_2 = \omega_1 R_1 / R_2$, $v_{c4} = \omega_4 R_4$,
 $\omega_4 = \omega_2 r_2 R_4 / ((R_4 + r_4)R_4)$ й пришвидшення $a_{c3} = \ddot{q}$, $\varepsilon_1 = \ddot{q} / R_1$,
 $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 R_1 / R_2$, $a_{c4} = \varepsilon_4 R_4$, $\varepsilon_4 = \varepsilon_2 r_2 R_4 / ((R_4 + r_4)R_4)$.

Комп'ютерне моделювання на базі рівнянь Лагранжа 2-го роду.
Досліджуються закони руху тіл механізму електромеханічного приводу,
що під дією змінного у часі моменту на валу електродвигуна приводить
до руху різні тіла електромеханічного приводу; закономірності зміни у
часі *мір механічного руху і дії сил*: кількості руху, кінетичного моменту,
кінетичної та повної енергії, роботи й потужності сил, а також *кінема-*
тичних характеристик руху тіл механізму: швидкостей, пришвидшень і
переміщення з початкового їхнього положення, на базі розв'язування
диференціальних рівнянь Лагранжа 2-го роду, які в інваріантній формі є
наслідком теоретичних положень і фундаментальних принципів аналі-
тичної механіки.

Завдання на самостійну роботу: студентам пропонується само-
стійно підготувати свій файл вихідних даних ПК КіДиМ за прикладом,
напередодні виданим викладачем.

Список літератури

1. Павловський М.А. Теоретична механіка: підруч./ М.А. Павловський – К. : Техніка, 2002. – 510 с.
2. Смерека І. П. Короткий довідник з теоретичної механіки : навч. посіб. / І.П. Смерека, А.Ф. Барвінський, Б.Д. Білоус та ін. – Львів : «Інтелект-Захід, 2001. – 240 с.
3. Андреев Ю.М. Практикум по теоретической и аналитической механике с применением ПЭВМ : навч. посіб./ Ю.М. Андреев, Е.И. Дружинин, А.А. Ларин – Х. : НТУ „ХПИ”, 2004. – 100 с.
4. Лавинский Д.В. Информационные технологии в аналитической механике : учеб. пособие / Д.В. Лавинский, О.К. Морачковский – Х. : НТУ «ХПИ», 2007. – 183 с.

Персональна сторінка

<http://users.kpi.kharkov.ua/tm/PersPages/Morachkovsky/Morachkovsky.htm>

Комп'ютерний лабораторний практикум

<http://users.kpi.kharkov.ua/tm/PersPages/Morachkovsky/Educational%20work.htm>

Дистанційний курс «Практикум з теоретичної механіки»

<http://dl.kpi.kharkov.ua/techn/tu16/default.asp?rus>

ЗМІСТ

Вступ.	3
1. Дидактичні та методичні вимоги до навчання.	4
2. Дидактичні пропозиції до створення комп'ютерного практикуму з теоретичної механіки для ЕМБ факультету . . .	14
3. Модуль 1 – Кінематика та статика	15
3.1. Теоретичні відомості з кінематики точки	15
Питання для самоконтролю.	17
3.2. Лабораторні заняття.	17
3.3. Теоретичні відомості з кінематики найпростіших рухів тіл	18
Питання для самоконтролю.	23
3.4. Лабораторні заняття.	24
3.5. Лабораторна робота 1. Дослідження кінематики точки та механічної системи.	25
3.6. Теоретичні відомості зі статички. Типи в'язей та їхні реакції.	27
Питання для самоконтролю.	34
3.7. Лабораторні заняття.	36
3.8. Лабораторна робота 2. Визначення реакцій в'язей механічної системи.	41
4. Модуль 2 – Динаміка.	44
4.1. Теоретичні відомості.	44
Питання для самоконтролю.	56
4.2. Лабораторні заняття.	58
4.3. Лабораторна робота 3. Визначення характеристик руху точок та тіл механічної системи.	65
Список літератури.	70

Навчальне видання

ДИДАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до комп'ютерного практикуму з дисципліни «Теоретична механіка» для викладачів кафедри теоретичної механіки та студентів бакалаврських напрямів 6.050702 – «Електромеханіка», 6.051003 – «Приладобудування» електромашинобудівного факультету

Укладачі: АДАШЕВСЬКИЙ Володимир Михайлович
МОРАЧКОВСЬКИЙ Олег Костянтинович

Відповідальний за випуск О. К. Морачковський

Роботу до видання рекомендував проф. Д.В. Бреславський

Редактор О.І. Шпильова

План 2013р., поз. 4
Підп. до друку . Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. .
Наклад 50 прим. Зам. № . Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК №3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.

Друкарня НТУ «ХПІ».

61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.